

# 『統計的機械学習の数理 100 問 with Python』の解答例 (数理)

鈴木 譲

プログラムに関しては、略解 (Python プログラム).html を参照してください。

## 第 1 章 線形回帰

1.  $S := \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$

(a)  $\bar{x} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ ,  $\bar{y} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$  とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta_0} &= -2 \sum_{i=1}^N (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \iff \sum_{i=1}^N (\beta_0 + \beta_1 x_i) = \sum_{i=1}^N y_i \\ &\iff N\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i \iff \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \iff \beta_0 + \beta_1 \bar{x} = \bar{y} \end{aligned}$$

を得る。

(b)  $\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$  より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta_1} &= -2 \sum_{i=1}^N x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \iff \beta_0 \sum_{i=1}^N x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ &\iff (\bar{y} - \beta_1 \bar{x}) \sum_{i=1}^N x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i \iff N\bar{x}\bar{y} - \beta_1 N\bar{x}^2 + \beta_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ &\iff \beta_1 \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2 \right) = \sum_{i=1}^N x_i y_i - N\bar{x}\bar{y} \iff \beta_1 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \end{aligned}$$

$x_1, \dots, x_N$  がすべて等しくない、つまり  $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \neq 0$  であるから、

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

となる。

2.  $l$  の傾き ( $\hat{\beta}_1$ ) は

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

で、切片 ( $\hat{\beta}_0$ ) は、

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

により定まる。 $x_i - \bar{x} \mapsto x_i, y_i - \bar{y} \mapsto y_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を考えると、 $l'$  の傾き  $\hat{\beta}_1$  は、

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

となる。このとき、 $\bar{x} = \bar{y} = 0$  より  $l'$  の切片は 0 となる (原点を通る)。また、 $\hat{\beta}_1$  が求まってから  $l$  の切片  $\hat{\beta}_0$  を求めるには  $\hat{\beta}_1$  と (a') から切片  $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$  を求めればよい。

(a) 任意の  $z \in \mathbb{R}^m$  に対して

$$Az = B^\top Bz = 0 \Rightarrow z^\top B^\top Bz = 0 \Rightarrow (Bz)^\top Bz = 0 \Rightarrow \|Bz\|^2 = 0 \Rightarrow Bz = 0$$

$$Bz = 0 \Rightarrow B^\top Bz = 0 \Rightarrow Az = 0$$

となる。よって、

$$Az = 0 \Leftrightarrow Bz = 0$$

(b) (a) より  $A, B$  による線形写像の核が等しい。また、命題 4(次元定理) により、 $A, B$  はともに像の次元と核の次元の和が  $m$  になる。よって、 $A, B$  の像の次元は等しく、命題 4 より  $A, B$  の階数も等しい。

5.  $X \in \mathbb{R}^{N \times (p+1)}$  を最初の列がすべて 1 の行列として、

(a)  $N < p+1$  のとき命題 3 より、

$$\text{rank}(X^\top X) \leq \text{rank}(X) = \min\{N, p+1\} = N < p+1.$$

$X^\top X \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$  が正方行列であることに注意すると、命題 1 より  $X^\top X$  は逆行列をもたない。

(b)  $N \geq p+1$  であって、 $X$  のある 2 列が等しいとき、命題 3 より、

$$\text{rank}(X^\top X) \leq \text{rank}(X) < p+1$$

よって (a) と同様の理由で  $X^\top X$  は逆行列をもたない。

6. (a)  $j = 0, 1, \dots, p$  に対して、

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{k=0}^p x_{i,k} \beta_k \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{k \neq j} x_{i,k} \beta_k - x_{i,j} \beta_j \right)^2$$

が成り立つ。これの  $\beta_j$  での偏微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta_j} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ 2x_{i,j} \beta_j - 2x_{i,j} \left( y_i - \sum_{k \neq j} x_{i,k} \beta_k \right) \right\} = - \sum_{i=1}^N x_{i,j} y_i + \sum_{i=1}^N \left( x_{i,j}^2 \beta_j + x_{i,j} \sum_{k \neq j} x_{i,k} \beta_k \right) \\ &= - \sum_{i=1}^N x_{i,j} y_i + \sum_{k=0}^p \sum_{i=1}^N x_{i,j} x_{i,k} \beta_k \end{aligned}$$

となる。一方、 $X^\top y$  の第  $j$  成分は、 $\sum_{i=1}^N x_{i,j} y_i$ 、 $X^\top X$  の第  $(j, k)$  成分は  $\sum_{i=1}^N x_{i,j} x_{i,k}$ 、 $X^\top X \beta$  の第  $j$  成分は  $\sum_{k=0}^p \sum_{i=1}^N x_{i,j} x_{i,k} \beta_k$  であるから、 $-X^\top y + X^\top X \beta$  の第  $j$  成分は

$$- \sum_{i=1}^N x_{i,j} y_i + \sum_{k=0}^p \sum_{i=1}^N x_{i,j} x_{i,k} \beta_k$$

となり、 $\frac{\partial L}{\partial \beta_j}$  と一致することから、題意は示された。

(b) (a) の計算により  $\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = 0$  なる  $\beta \in \mathbb{R}^{p+1}$  は、

$$-X^\top y + X^\top X \beta = 0$$

をみたせばよい。 $X^\top X$  に逆行列が存在することを仮定すれば、求める  $\hat{\beta}$  は

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y$$

となる。

7. (a) 条件より  $y = X\beta + \varepsilon$  となる。これを命題 11 に代入すると、

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X^\top X)^{-1} X^\top y = (X^\top X)^{-1} X^\top (X\beta + \varepsilon) = (X^\top X)^{-1} X^\top X \beta + (X^\top X)^{-1} X^\top \varepsilon \\ &= \beta + (X^\top X)^{-1} X^\top \varepsilon\end{aligned}$$

を得る。

(b)  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$  より、 $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$  の平均は 0 であるので、定数の行列  $(X^\top X)^{-1} X^\top$  がかかっていても、 $(X^\top X)^{-1} X^\top \varepsilon$  の平均も 0 となる。よって、(a) より  $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta$  であるから、題意は示された。

(c) (a) より、

$$\begin{aligned}E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^\top] &= E\left[(X^\top X)^{-1} X^\top \varepsilon \left\{(X^\top X)^{-1} X^\top \varepsilon\right\}^\top\right] \\ &= E\left[(X^\top X)^{-1} X^\top \varepsilon \varepsilon^\top X (X^\top X)^{-1}\right] = (X^\top X)^{-1} X^\top E[\varepsilon \varepsilon^\top] X (X^\top X)^{-1} \\ &= (X^\top X)^{-1} X^\top \sigma^2 I X (X^\top X)^{-1} = \sigma^2 (X^\top X)^{-1} X^\top X (X^\top X)^{-1} = \sigma^2 (X^\top X)^{-1}\end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon$  の共分散行列が  $E[\varepsilon \varepsilon^\top] = \sigma^2$  となることを用いた。

8.  $H = X (X^\top X)^{-1} X^\top \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\hat{y} = X \hat{\beta}$  とおくと、

(a)  $H^2 = X (X^\top X)^{-1} X^\top X (X^\top X)^{-1} X^\top = X (X^\top X)^{-1} X^\top = H$  より、 $H^2 = H$  が成立する。

(b)  $(I - H)^2 = I - 2H + H^2 = I - 2H + H = I - H$  より、 $(I - H)^2 = I - H$  が成立する。

(c)  $HX = X (X^\top X)^{-1} X^\top = X$  より、 $HX = X$  が成立する。

(d) 命題 11 より、 $\hat{y} = x \hat{\beta} = x (X^\top x)^{-1} X^\top y = Hy$  となり、 $\hat{y} = Hy$  が成立する。

(e)  $y - \hat{y} = y - Hy = (I - H)(X\beta + \varepsilon) = (X - HX)\beta + (I - H)\varepsilon = (X - X)\beta + (I - H)\varepsilon = (I - H)\varepsilon$  となり、 $y - \hat{y} = (I - H)\varepsilon$  が成立する。ただし、最初の等号は (d) を、次の等号は (1.12) を、最後から 2 番目の等号は (c) を用いた。

(f)  $\|y - \hat{y}\|^2 = (y - \hat{y})^\top (y - \hat{y}) = \{(I - H)\varepsilon\}^\top (I - H)\varepsilon = \varepsilon^\top (I - H)^\top (I - H)\varepsilon = \varepsilon^\top (I - H)^2 \varepsilon = \varepsilon^\top (I - H)\varepsilon$  が成立する。ただし、2 番目の等号は (e) を、最後から 2 番目の等号は転置の線形性と

$$\begin{aligned}H^\top &= \left\{X (X^\top X)^{-1} X^\top\right\}^\top = X \left\{(X^\top X)^{-1}\right\}^\top X^\top = X \left\{(X^\top X)^\top\right\}^{-1} X^\top \\ &= X (X^\top X)^{-1} X^\top = H\end{aligned}$$

から、最後の変形は (b) によった。したがって、 $\|y - \hat{y}\|^2 = \varepsilon^\top (I - H)\varepsilon$  が成立する。

9. (a)  $H := X(X^\top X)^{-1}X^\top$  とおく。命題 3 と、 $\text{rank}(X) = p + 1$  より、

$$\text{rank}(H) \leq \min\{\text{rank}(X(X^\top X)^{-1}), \text{rank}(X^\top)\} \leq \text{rank}(X^\top) = \text{rank}(X) = p + 1$$

となる。一方、前問の (c) より  $HX = X$  を用いて

$$\text{rank}(HX) = \text{rank}(X) = p + 1$$

より、

$$\text{rank}(HX) \leq \min\{\text{rank}(H), \text{rank}(X)\} \leq \text{rank}(H)$$

したがって、 $\text{rank}(H) \geq p + 1$  が成立する。以上より、 $\text{rank}(H) = p + 1$  だから、命題 4 より  $H$  の像の次元は  $p + 1$  である。

- (b) 前問 (c):  $HX = X$  より、 $X$  の各列ベクトルは、 $H$  の固有値 1 のベクトルである。また、 $\text{rank}(X) = p + 1$  より、 $X$  の各列ベクトルは 1 次独立である。よって、 $X$  の各列ベクトルは  $H$  の固有値 1 の固有空間の基底となるので、その次元は  $p + 1$  である。ここで、 $H$  の固有値の固有空間は、 $H$  の核と等しい。よって、命題 4 と  $\text{rank}(H) = p + 1$  を用いると、核の次元は  $N - p - 1$  であるから、固有値が 0 の固有空間は  $N - p - 1$  次である。

- (c) 任意の  $x \in \mathbb{R}^{p+1}$  に対して、

$$(I - H)x = 0 \Leftrightarrow Hx = x$$

である。よって、 $H$  の固有値 1 の固有空間と  $I - H$  の固有値 0 の固有空間が等しいため、 $I - H$  の固有値 0 の固有空間の次元は  $p + 1$  である。また、

$$(I - H)x = x \Leftrightarrow Hx = 0$$

である。よって  $H$  の固有値 0 の固有空間と  $I - H$  の固有値 1 の固有空間が等しいため、 $I - H$  の固有値 1 の固有空間の次元は  $N - p - 1$  である。

10. (a)  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$  とする。 $v = P\varepsilon$  とおくと、 $\varepsilon = P^{-1}v = P^\top v$  とでき、

$$\varepsilon^\top (I - H)\varepsilon = v^\top P(I - H)P^\top v$$

ここで、 $P(I - H)P^\top$  は  $N$  個の固有値を成分にもつ対角行列となる。特に、前問の結果から、 $I - H$  は固有値 1 が  $N - p - 1$  個、固有値 0 が  $p + 1$  個あることが示される。したがって、

$$v^\top P(I - H)P^\top v = \sum_{i=1}^{N-p-1} v_i^2$$

が得られる。

- (b)  $E[vv^\top] = PE[\varepsilon\varepsilon^\top]P^\top = P\sigma^2 IP^\top = \sigma^2 IPP^\top = \sigma^2 I$  となる。

- (c)  $V := [v_1, \dots, v_N]$ ,  $v_i \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, N$  とすると、 $Z_i = \frac{v_i}{\sigma}$  は互いに独立であって、それぞれ  $N(0, 1)$  に従う。よって、

$$\sum_{i=1}^{N-p-1} \frac{v_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_{N-p-1}^2$$

であって、(a) より

$$\frac{RSS}{\sigma^2} \sim \chi_{N-p-1}^2$$

11. (a)

$$\begin{aligned} E[(\hat{\beta} - \beta)(y - \hat{y})^T] &= E[(X^T X)^{-1} X^T \epsilon \epsilon^T (I - H)] = (X^T X)^{-1} X^T E[\epsilon \epsilon^T] (I - H) \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I (I - H) = \sigma^2 \{(X^T X)^{-1} X^T - (X^T X)^{-1} X^T H\} \\ &= \sigma^2 \{(X^T X)^{-1} X^T - (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} X^T\} = 0 \end{aligned}$$

(b)  $i = 0, 1, \dots, p$  に対して、 $(\hat{\beta}_i - \beta_i) / (\sqrt{B_i} \sigma)$  は  $\hat{\beta} - \beta$  の関数であり、 $RSS$  は  $y - \hat{y}$  の関数であり、 $\hat{\beta} - \beta$  と  $y - \hat{y}$  はともに正規分布に従うことと、(a) より共分散行列が 0 になることから、この 2 つは独立である。よって、題意は示された。

(c)  $i = 0, 1, \dots, p$  に対して、

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{SE(\hat{\beta}_i)} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma} \sqrt{B_i}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\frac{RSS}{N-p-1}} \sqrt{B_i}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\frac{RSS}{\sigma^2}}} \sqrt{B_i} \sigma = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{B_i} \sigma} / \sqrt{\frac{RSS}{\sigma^2} / (N-p-1)}$$

このとき、 $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$  より、 $\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{B_i} \sigma} \sim N(0, 1)$  であり、10.(c) も合わせて考えると、 $\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{SE(\hat{\beta}_i)} \sim t_{N-p-1}$  となることがわかる。

(d) 以下、 $\sum_i = \sum_{i=1}^N$  のように表す。 $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{pmatrix}$  に対して、

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \frac{1}{N} \sum_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

したがって、

$$(X^T X)^{-1} = \frac{1}{N \frac{1}{N} \sum_i x_i^2 - (\bar{x})^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_i x_i^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_i x_i^2 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix}$$

となる。ゆえに、題意は示された。

14. (a) 8. (c) で示した等式  $HX = X$  について、 $X$  の第 0 列ベクトルは成分がすべて 1 となっていることから、すべての成分が  $1/N$  であるような  $W$  の各列ベクトルは、 $H$  の固有値 1 の固有ベクトルになっている。したがって、 $HW = W$  が成り立つことがわかる。さらに、

$$(I - H)(H - W) = H - W - H^2 + HW = H - W - H + W = 0$$

となる。ただし、8. (a) の  $H^2 = H$  を用いた。

(b)

$$ESS = \|\hat{y} - \bar{y}\|^2 = \|Hy - Wy\|^2 = \|(H - W)y\|^2,$$

$$TSS = \|y - \bar{y}\|^2 = \|Iy - Wy\|^2 = \|(I - W)y\|^2$$

よって、題意は示された。

(c)

$$ESS = \|(H - W)y\|^2 = \|(H - W)X\beta + (H - W)\epsilon\|^2$$

$RSS = \|(I - H)\epsilon\|^2$  の独立性を示すためには、ともに正規分布にしたがう  $(I - H)\epsilon$  と  $(H - W)\epsilon$  の独立性を示せばよく、これらの共分散行列は、(a) より、

$$\begin{aligned} E[(I - H)\epsilon\{(H - W)\epsilon\}^T] &= E[(I - H)\epsilon\epsilon^T(H - W)] = (I - H)E[\epsilon\epsilon^T](H - W) \\ &= (I - H)\sigma^2 I(H - W) = \sigma^2(I - H)(H - W) = 0 \end{aligned}$$

となるので、題意の独立性が示された。

(d) (a) を用いると、

$$\begin{aligned} \|(I - W)y\|^2 &= \|(I - H)y + (H - W)y\|^2 \\ &= \|(I - H)y\|^2 + \|(H - W)y\|^2 + 2\{(I - H)y\}^T(H - W)y \\ &= \|(I - H)y\|^2 + \|(H - W)y\|^2 + 2y^T(I - H)(H - W)y = \|(I - H)y\|^2 + \|(H - W)y\|^2 \end{aligned}$$

よって、題意は示された。

15. (a)  $\hat{y} - \bar{y}$  の第  $i$  成分  $\hat{y}_i - \bar{y}_i$  について、

$$\hat{y}_i - \bar{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \hat{\beta}_1 (x_i - \bar{x})$$

が成り立つ。したがって、

$$\hat{y} - \bar{y} = \hat{\beta}_1 (x - \bar{x})$$

となる。ただし、上式における  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$  は、全成分が  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  であるような列ベクトルである。

(b) (a) を用いると、

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\|\hat{y} - \bar{y}\|^2}{\|y - \bar{y}\|^2} = \frac{\hat{\beta}_1^2 \|x - \bar{x}\|^2}{\|y - \bar{y}\|^2}$$

が成り立つことがわかる。

(c) (b) より、

$$R^2 = \left\{ \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \right\}^2 \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

一方で、標本相関係数  $\hat{r}$  は、

$$\hat{r} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}}$$

であるから、

$$\hat{r}^2 = \frac{\{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\}^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2} = \left\{ \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \right\}^2 \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

これは、 $R^2$  に一致している。

17. (a)  $x_*$  が定数であることに注意する。

$$E[x_* \hat{\beta}] = x_* E[\hat{\beta}]$$

より、7.(c) も合わせて考えると、

$$V[x_* \hat{\beta}] = E\left[\left\{x_*(\hat{\beta} - \beta)\right\}^T x_*(\hat{\beta} - \beta)\right] = x_* V(\hat{\beta}) x_*^T = \sigma^2 x_* (X^T X)^{-1} x_*^T$$

が成り立つ。

(b)

$$\begin{aligned} \frac{x_* \hat{\beta} - x_* \beta}{SE(x_* \hat{\beta})} &= \frac{x_* \hat{\beta} - x_* \beta}{\hat{\sigma} \sqrt{x_* (X^T X)^{-1} x_*^T}} = \frac{x_* \hat{\beta} - x_* \beta}{\sqrt{\frac{RSS}{N-p-1}} \sqrt{x_* (X^T X)^{-1} x_*^T}} \\ &= \frac{x_* \hat{\beta} - x_* \beta}{\sqrt{\frac{RSS}{N-p-1}} \sqrt{x_* (X^T X)^{-1} x_*^T}} = \frac{x_*(\hat{\beta} - \beta)}{\sigma \sqrt{x_* (X^T X)^{-1} x_*^T}} / \sqrt{\frac{RSS/\sigma^2}{N-p-1}} \end{aligned}$$

このとき、 $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$  より、(分子)  $\sim N(0, 1)$  となる。一方で、11.(b) より、 $RSS/\sigma^2 \sim \chi_{N-p-1}^2$ 、さらにこれら 2 つは独立であることも示したので、

$$\frac{x_* \hat{\beta} - x_* \beta}{SE(x_* \hat{\beta})} \sim t_{N-p-1}$$

となることがわかる。

(c)

$$V[x_* \hat{\beta} - y_*] = \sigma^2 x_* (X^T X)^{-1} x_*^T + \sigma^2 = \sigma^2 \left\{1 + x_* (X^T X)^{-1} x_*^T\right\}$$

より、

$$\frac{x_* \hat{\beta} - y_*}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + x_* (X^T X)^{-1} x_*^T}} = \frac{x_* \hat{\beta} - y_*}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + x_* (X^T X)^{-1} x_*^T}} / \sqrt{\frac{RSS/\sigma^2}{N-p-1}}$$

の、(分子)  $\sim N(0, 1)$ 、 $RSS/\sigma^2 \sim \chi_{N-p-1}^2$  より、

$$\frac{x_* \hat{\beta} - y_*}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + x_* (X^T X)^{-1} x_*^T}} \sim t_{N-p-1}$$

を得る。

## 第2章 分類

19.  $f(y) = \frac{1}{1 + e^{-y(\beta_0 + x^T \beta)}}$  について、

$$f(-1) = \frac{1}{1 + e^{-(-1)(\beta_0 + x^T \beta)}} = \frac{1}{1 + e^{(\beta_0 + x^T \beta)}} = P(Y = -1)$$

$$f(1) = \frac{1}{1 + e^{-1(\beta_0 + x^T \beta)}} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + x^T \beta)}} = \frac{e^{\beta_0 + x^T \beta}}{e^{\beta_0 + x^T \beta} + 1} = P(Y = 1)$$

よって、題意は示された。

20.  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + x\beta)}}$  に対して、 $f'(x) = \frac{\beta e^{-(\beta_0 + x\beta)}}{\{1 + e^{-(\beta_0 + x\beta)}\}^2}$

$$f''(x) = \frac{-\beta^2 e^{-(\beta_0 + x\beta)} \{1 + e^{-(\beta_0 + x\beta)}\} + 2\beta^2 e^{-2(\beta_0 + x\beta)}}{\{1 + e^{-(\beta_0 + x\beta)}\}^3} = \frac{\beta^2 e^{-(\beta_0 + x\beta)} \{-1 + e^{-(\beta_0 + x\beta)}\}}{\{1 + e^{-(\beta_0 + x\beta)}\}^3}$$

となり、 $\beta > 0$  より、任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $f'(x) > 0$ ,  $x < -\beta_0/\beta$  で  $f''(x) > 0$ ,  $x > -\beta_0/\beta$  で  $f''(x) < 0$ , となる。したがって、 $f(x)$  は、任意の  $x \in \mathbb{R}$  で単調増加し、 $x < -\beta_0/\beta$  で下に凸、 $x > -\beta_0/\beta$  で上に凸となる。題意の処理を行った結果を略解 (R プログラム第2章) に示した。これは  $\beta_0 = 0$  として、 $\beta$  のをそれぞれ 0, 0.2, 0.5, 1, 2, 10 としたときの  $y = f(x)$  のグラフを出力したものであるが、 $\beta$  のが大きくなればなるほど、 $x = 0$  付近で  $y = -1$  から  $(x, y) = (0, 0)$  を通って、 $y = 1$  付近により鋭敏に変化していることがわかる。

21.  $\beta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ ,  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^p \times \{-1, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $x_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix}$ ,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \cdots & x_{Np} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (p+1)}$$

( $x_{i0} = 0$  とみなす) に対して、

$$l(\beta_0, \beta) = \sum_{i=1}^N \log \left\{ 1 + e^{-y_i(\beta_0 + x_i^T \beta)} \right\} = \sum_{i=1}^N \log \left[ 1 + \exp \left\{ -y_i \sum_{k=0}^p (x_{ik} \beta_k) \right\} \right]$$

となる。このとき、 $j = 0, 1, \dots$  に対して、

$$\frac{\partial l(\beta_0, \beta)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{-(x_{ij} y_i) \exp \left\{ -y_i \sum_{k=0}^p (x_{ik} \beta_k) \right\}}{1 + \exp \left\{ -y_i \sum_{k=0}^p (x_{ik} \beta_k) \right\}} = - \sum_{i=1}^n \frac{y_i v_i}{1 + v_i} x_{ij}$$

が成り立つ。ただし、 $i = 1, 2, \dots, N$  に対して、 $v_i = \exp \left\{ -y_i \sum_{k=0}^p (x_{ik} \beta_k) \right\}$  とした。したがって、

$$\nabla l(\beta_0, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial l(\beta_0, \beta)}{\partial \beta_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\beta_0, \beta)}{\partial \beta_p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1}$$

は、 $u = \begin{pmatrix} \frac{y_1 v_1}{1 + v_1} \\ \vdots \\ \frac{y_N v_N}{1 + v_N} \end{pmatrix}$  を用いて、 $\nabla l(\beta_0, \beta) = -X^T u$  と書ける。さらに、 $i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots, p$  に対して、

$$\frac{\partial v_i}{\partial \beta_j} = -y_i x_{ij} v_i$$



が成り立つことにも注意すると、 $j, k = 0, 1, \dots, p$  に対して、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l(\beta_0, \beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k} &= -\frac{\partial}{\partial \beta_k} \sum_{i=1}^n \frac{y_i v_i}{1+v_i} x_{ij} = -\sum_{i=1}^n x_{ij} \frac{\partial}{\partial \beta_k} \frac{y_i v_i}{1+v_i} \\ &= -\sum_{i=1}^n x_{ij} \frac{(-y_i^2 x_{ik} v_i)(1+v_i) - (y_i v_i)(-y_i x_{ik} v_i)}{(1+v_i)^2} \\ &= -\sum_{i=1}^n x_{ij} \frac{(-x_{ik} v_i)(1+v_i) + x_{ik} v_i^2}{(1+v_i)^2} = \sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik} \frac{v_i}{(1+v_i)^2}\end{aligned}$$

ただし、途中で  $y_i \in \{-1, 1\}$  より、 $y_i^2 = 1$  となることを用いた。このとき、 $W$  を、第  $(i, i)$  成分が  $v_i / (1+v_i)^2$  となるような  $N$  次の対角行列、すなわち

$$W = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{(1+v_1)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{(1+v_2)^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{v_N}{(1+v_N)^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

とすると、 $WX \in \mathbb{R}^{N \times p+1}$  の第  $(i, k)$  成分 ( $i = 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, p$ ) は、

$$\frac{v_i}{(1+v_i)^2} x_{ik}$$

となるから、 $X^T W X \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$  の第  $(j, k)$  成分 ( $j, k = 0, 1, \dots, p$ ) は、

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} \frac{v_i}{(1+v_i)^2} x_{ik} = \sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik} \frac{v_i}{(1+v_i)^2} = \frac{\partial^2 l(\beta_0, \beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k}$$

が成り立つ。したがって、求める 2 階微分  $\nabla^2 l(\beta_0, \beta)$  は、

$$\nabla^2 l(\beta_0, \beta) = X^T W X$$

と表される。ここで、任意の  $i = 1, \dots, N$  について、 $v_i > 0$  より、 $v_i / (1+v_i)^2 > 0$  となるので、 $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$  の各成分を、 $W$  の各成分の平方根としたもの、すなわち

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{v_1}{(1+v_1)^2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{v_2}{(1+v_2)^2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\frac{v_N}{(1+v_N)^2}} \end{bmatrix}$$

とすれば、 $W = U^T U$  と書けるので、 $\nabla^2 l(\beta_0, \beta) = X^T (U^T U) X = (UX)^T UX$  となる。したがって、命題 10 の 1. ならば 3. が成り立つを用いれば、 $\nabla^2 l(\beta_0, \beta)$  は非負定値行列であることがわかるので、 $l(\beta_0, \beta)$  は凸である。

23. 更新規則を  $\beta_{\text{old}}, \beta_{\text{new}}, u, W, X$  を用いて書き直すと、

$$\beta_{\text{new}} \leftarrow \beta_{\text{old}} + (X^T W X)^{-1} X^T u$$

となる。このとき、右辺を変形していくと、

$$\begin{aligned}\beta_{\text{old}} + (X^T W X)^{-1} X^T u &= (X^T W X)^{-1} X^T W X \beta_{\text{old}} + (X^T W X)^{-1} X^T u \\ &= (X^T W X)^{-1} X^T (W X \beta_{\text{old}} + u) = (X^T W X)^{-1} X^T W (X \beta_{\text{old}} + W^{-1} u)\end{aligned}$$

したがって、 $z = X \beta_{\text{old}} + W^{-1} u$  とすれば、更新規則は

$$\beta_{\text{new}} \leftarrow (X^T W X)^{-1} X^T W z$$

と表される。

25. 尤度  $\prod_{i=1}^N \frac{1}{1 + \exp \{-y_i (\beta_0 + \beta^T x_i)\}}$  の最大化を考えると、任意の  $i = 1, \dots, N$  に対して  $y_i (\beta_0 + \beta^T x_i) \geq 0$  が成り立っているならば、任意の  $\beta_0, \beta$  を固定したとき、たとえば  $\beta_0 \leftarrow 2\beta_0, \beta \leftarrow 2\beta$  と置き換えることで、(2.1) の指数部分をより小さくすることができる。したがって、最大値

$$\max_{\beta_0, \beta} \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 + \exp \{-y_i (\beta_0 + \beta^T x_i)\}}$$

は存在しないから、仮定を満足しているもとでは、ロジスティック回帰の最尤推定のパラメータを見出すことはできない。

26. 正答率は  $(39 + 42)/100 = 0.81$  となった。

27.

$$\begin{aligned}S_{k,l} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid \frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{j=1}^K \pi_j f_j(x)} = \frac{\pi_l f_l(x)}{\sum_{j=1}^K \pi_j f_j(x)} \right\} \\ f_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det \Sigma_k}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) \right\}\end{aligned}$$

(a)  $\pi_k = \pi_l$  を仮定すると、

$$\begin{aligned}\frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{j=1}^K \pi_j f_j(x)} &= \frac{\pi_l f_l(x)}{\sum_{j=1}^K \pi_j f_j(x)} \\ \iff f_k(x) &= f_l(x) \\ \iff \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det \Sigma_k}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det \Sigma_l}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu_l)^T \Sigma_l^{-1} (x - \mu_l) \right\} \\ \iff \sqrt{\frac{\det \Sigma_k}{\det \Sigma_l}} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left\{ -(x - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) + (x - \mu_l)^T \Sigma_l^{-1} (x - \mu_l) \right\} \right\}\end{aligned}$$

上式で両辺の対数を取っても必要十分なので、

$$\log \frac{\det \Sigma_k}{\det \Sigma_l} = -(x - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) + (x - \mu_l)^T \Sigma_l^{-1} (x - \mu_l)$$

よって、 $S_{k,l}$  が題意の形で与えられることが示された。

(b)  $\Sigma_k = \Sigma_l = \Sigma$  を仮定すると、

$$\begin{aligned} \frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{j=1}^K \pi_j f_j(x)} &= \frac{\pi_l f_l(x)}{\sum_{j=1}^K \pi_j f_j(x)} \\ \iff \pi_k f_k(x) &= \pi_l f_l(x) \\ \iff \pi_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu_k)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_k) \right\} &= \pi_l \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu_l)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_l) \right\} \\ \iff \frac{\pi_k}{\pi_l} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left\{ -(x - \mu_l)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_l) + (x - \mu_k)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_k) \right\} \right\} \end{aligned}$$

上式で両辺の対数を取っても必要十分なので、

$$\log \frac{\pi_k}{\pi_l} = \frac{1}{2} \left\{ -(x - \mu_l)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_l) + (x - \mu_k)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_k) \right\}$$

ここで、 $\Sigma$  が共分散行列であるから対称行列となるので、

$$\Sigma \Sigma^{-1} = I \iff (\Sigma \Sigma^{-1})^T = I \iff (\Sigma^{-1})^T \Sigma^T = I \iff (\Sigma^{-1})^T \Sigma = I$$

したがって、 $\Sigma^{-1} (= (s_{ij})$  としておく) も対称行列となることに注意すると、

$$\begin{aligned} \log \frac{\pi_k}{\pi_l} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij} \{ (x_i - \mu_{ki}) (x_j - \mu_{kj}) - (x_i - \mu_{li}) (x_j - \mu_{lj}) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij} \{ (x_i - \mu_{ki}) (x_j - \mu_{kj}) - (x_i - \mu_{li}) (x_j - \mu_{lj}) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij} \{ x_i (-\mu_{kj} + \mu_{lj}) + x_j (-\mu_{ki} + \mu_{li}) + \mu_{ki} \mu_{kj} - \mu_{li} \mu_{lj} \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij} \{ 2x_i (-\mu_{kj} + \mu_{lj}) + (\mu_{ki} \mu_{kj} - \mu_{li} \mu_{lj}) \} \\ &= (\mu_l - \mu_k)^T \Sigma^{-1} x + \frac{1}{2} (\mu_k - \mu_l)^T \Sigma^{-1} (\mu_k - \mu_l) \\ &= (\mu_k - \mu_l)^T \Sigma^{-1} x - \frac{1}{2} (\mu_k - \mu_l)^T \Sigma^{-1} (\mu_k - \mu_l) + \log \frac{\pi_k}{\pi_l} = 0 \end{aligned}$$

から、求める  $a, b$  は

$$\begin{aligned} a &= \left\{ (\mu_k - \mu_l)^T \Sigma^{-1} \right\}^T = \Sigma^{-1} (\mu_k - \mu_l) \\ b &= -\frac{1}{2} (\mu_k - \mu_l)^T \Sigma^{-1} (\mu_k - \mu_l) + \log \frac{\pi_k}{\pi_l} \end{aligned}$$

となる。

(c) (b) で得た  $\Sigma_k = \Sigma_l$  の場合の平面の式で、さらに  $\pi_k = \pi_l$  とすれば、

$$(\mu_k - \mu_l)^T \Sigma^{-1} x - \frac{1}{2} (\mu_k - \mu_l)^T \Sigma^{-1} (\mu_k - \mu_l) = 0 \iff (\mu_k - \mu_l)^T \Sigma^{-1} \left( x - \frac{\mu_k - \mu_l}{2} \right) = 0$$

となるので、境界は平面  $x = (\mu_k - \mu_l) / 2$  となる。

### 第3章 リサンプリング

32.  $(A + UCV) \left( A^{-1} - A^{-1}U (C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} \right) = I$  を示せば十分。

$$\begin{aligned}
 & (A + UCV) \left( A^{-1} - A^{-1}U (C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} \right) \\
 &= I + UCV A^{-1} - U (C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} - UCV A^{-1}U (C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} \\
 &= I + UCV A^{-1} - UC \cdot C^{-1} \cdot (C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} \\
 &\quad - UC \cdot VA^{-1}U \cdot (C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} \\
 &= I + UCV A^{-1} - UC \cdot (C^{-1} + VA^{-1}U) \cdot (C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1} VA^{-1} \\
 &= I + UCV A^{-1} - UCV A^{-1} = I
 \end{aligned}$$

よって、題意は示された。

33. (a)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (p+1)}$$

に対して、

$$X^T X = \sum_{i=1}^N x_i^T x_i = \sum_{i \in S} x_i^T x_i + \sum_{i \notin S} x_i^T x_i = X_S^T X_S + X_{-S}^T X_{-S}$$

が成り立つことに注意する。32. で示した等式で、

$$A = X^T X, \quad U = X_S^T, \quad V = -X_S, \quad C = I$$

とすれば、

$$\begin{aligned}
 \{X^T X - X_S^T X_S\}^{-1} &= (X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} X_S^T \left\{ I - X_S (X^T X)^{-1} X_S^T \right\}^{-1} X_S (X^T X)^{-1} \\
 (X_{-S}^T X_{-S})^{-1} &= (X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} X_S^T (I - H_S)^{-1} X_S (X^T X)^{-1}
 \end{aligned}$$

ただし、 $H_S = X_S (X^T X)^{-1} X_S^T$  である。よって、題意は示された。

(b)

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_{-S} &= (X_{-S}^T X_{-S})^{-1} X_{-S}^T y_{-S} \\
 &= \left\{ (X^T X)^{-1} + (X^T X)^{-1} X_S^T (I - H_S)^{-1} X_S (X^T X)^{-1} \right\} (X^T y - X_S^T y_S) \\
 &= \hat{\beta} - (X^T X)^{-1} X_S^T y_S + (X^T X)^{-1} X_S^T (I - H_S)^{-1} (X_S \hat{\beta} - H_S y_S) \\
 &= \hat{\beta} - (X^T X)^{-1} X_S^T (I - H_S)^{-1} \left\{ (I - H_S) y_S - X_S \hat{\beta} + H_S y_S \right\} \\
 &= \hat{\beta} - (X^T X)^{-1} X_S^T (I - H_S)^{-1} (y_S - X_S \hat{\beta}) \\
 &= \hat{\beta} - (X^T X)^{-1} X_S^T (I - H_S)^{-1} (y_S - \hat{y}) \\
 &= \hat{\beta} - (X^T X)^{-1} X_S^T (I - H_S)^{-1} e_S
 \end{aligned}$$

よって、題意は示された。

34.

$$\begin{aligned}
y_S - X_S \hat{\beta}_{-S} &= y_S - X_S \left\{ \hat{\beta} - (X^T X)^{-1} X_S^T (I - H_S)^{-1} e_S \right\} \\
&= y_S - X_S \hat{\beta} + X_S (X^T X)^{-1} X_S^T (I - H_S)^{-1} e_S \\
&= e_S + H_S (I - H_S)^{-1} e_S \\
&= (I - H_S) (I - H_S)^{-1} e_S + H_S (I - H_S)^{-1} e_S \\
&= (I - H_S)^{-1} e_S
\end{aligned}$$

したがって、CV の全グループの二乗誤差の和は、

$$\sum_S \|y_S - X_S \hat{\beta}_{-S}\|^2 = \sum_S \|(I - H_S)^{-1} e_S\|^2$$

と書くことができる。よって、題意は示された。

35. 二乗誤差の和は一致しており、`cv_fast` の実行時間 のほうが短いことがわかる。

39. 最初の 3 種類のデータは、 $j = 1, 2, 3$  に対して、第 1 変数を第 3-第 4 変数に回帰したときの切片および 2 個の傾きの推定値を求め、その推定値の標準偏差を評価したものである。

## 第 4 章 情報量規準

40. (a)

$$\begin{aligned}
\max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} l &= \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \sum_{i=1}^N \log f(y_i | x_i, \beta) = \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{\|y_i - x_i \beta\|^2}{2\sigma^2} \right\} \\
&= -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\|y_i - x_i \beta\|^2}{2\sigma^2} \right\} \\
&= -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \|y - X\beta\|^2
\end{aligned}$$

したがって、 $\sigma^2 > 0$  が既知であるとき、 $\beta$  について  $l$  を最大化することは、 $\|y - X\beta\|^2$  を最小化することと同値となる、

(b)  $l$  を  $\sigma^2$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \|y - X\beta\|^2$$

このとき、 $\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0$  とするような、 $\sigma^2$  の最尤推定量  $\hat{\sigma}^2$  は、 $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$  を用いて、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \|y - X\hat{\beta}\|^2$$

で与えられる。

(c) 任意の  $x > 0$  に対して、 $\log x \leq x - 1$  となることを用いると、任意の  $\mathbb{R}$  上の確率密度関数  $f, g$  に対して、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{g(x)}{f(x)} \\
&\geq - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right\} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x) - f(x)\} dx = -(1 - 1) = 0
\end{aligned}$$

最後に、 $f, g$  は確率密度関数であることを用いた。したがって、題意の不等式が成り立つ。

41. (a)

$$\begin{aligned}
f^N(y | x, \beta) &= \prod_{i=1}^N f(y_i | x_i, \beta) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j \right)^2 \right\} \\
\frac{\partial f^N(y | x, \beta)}{\partial \beta_k} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^N 2x_{ik} \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j \right) \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j \right)^2 \right\} \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \frac{1}{\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^N x_{ik} \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j \right) \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j \right)^2 \right\} \\
&= f^N(y | x, \beta) \sum_{i=1}^N \frac{x_{ik}}{\sigma^2} \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j \right) \\
\frac{\partial l}{\partial \beta_k} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \beta_k} \log f(y_i | x_i, \beta) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left\{ -\frac{1}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j \right)^2 \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j \right)^2 \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{x_{ik}}{\sigma^2} \left( y_i - \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j \right) \right\} \\
&= \frac{\partial f^N(y | x, \beta) / \partial \beta_k}{f^N(y | x, \beta)}
\end{aligned}$$

したがって、

$$\nabla l = \frac{\nabla f^N(y | x, \beta)}{f^N(y | x, \beta)}$$

(b)  $f^N(y | x, \beta)$  は同時確率密度関数なので、

$$\int f^N(y | x, \beta) dy = 1$$

が成り立つ。このとき、 $\beta$  による微分と  $y$  による積分の順序が可換であると仮定すると、上式の両辺を  $\beta$  で偏微分して、

$$\int \nabla f^N(y | x, \beta) dy = 0$$

が成立する。

(c)

$$E[\nabla l] = \int \frac{\nabla f^N(y | x, \beta)}{f^N(y | x, \beta)} f^N(y | x, \beta) dy = \int \nabla f^N(y | x, \beta) dy = 0$$

(d) (c) で得た等式の両辺を  $\beta$  で偏微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla(E[\nabla l]) = \nabla \int (\nabla l) f^N(y | x, \beta) dy = \int \nabla \{(\nabla l) f^N(y | x, \beta)\} dy \\ &= \int (\nabla^2 l) f^N(y | x, \beta) dy + \int (\nabla l) \nabla f^N(y | x, \beta) dy \\ &= E[\nabla^2 l] + \int (\nabla l)^2 f^N(y | x, \beta) dy = E[\nabla^2 l] + E[(\nabla l)^2] \end{aligned}$$

よって、題意は示された。したがって、(d) より、

$$\frac{1}{N} E[(\nabla l)^2] = -\frac{1}{N} E[\nabla^2 l]$$

が成り立つ。

42. (a)  $\beta$  の不偏推定量  $\tilde{\beta}$  について、

$$\int \tilde{\beta}_i f^N(y | x, \beta) dy = \beta_i$$

が成り立つので、この両辺を  $\beta_j$  で偏微分すると、

$$\int \tilde{\beta}_i \frac{\partial}{\partial \beta_j} f^N(y | x, \beta) dy = \int \tilde{\beta}_i f^N(y | x, \beta) (\nabla l) dy = \begin{cases} 1, & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

これを、共分散行列の形で表すと、

$$E[\tilde{\beta}(\nabla l)^T] = \int \tilde{\beta} \left\{ \frac{\nabla f^N(y | x, \beta)}{f^N(y | x, \beta)} \right\}^T f^N(y | x, \beta) dy = I$$

したがって、 $E[(\tilde{\beta} - \beta)(\nabla l)^T] = I$ 。最後に、 $E[\nabla l] = 0$  であることを用いた。

(b) 求める共分散行列は、

$$\begin{bmatrix} E[(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)^T] & E[(\nabla l)(\tilde{\beta} - \beta)^T] \\ E[(\tilde{\beta} - \beta)(\nabla l)^T] & E[(\nabla l)^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(\tilde{\beta}) & I \\ I & NJ \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} V(\tilde{\beta}) - (NJ)^{-1} & 0 \\ 0 & NJ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -(NJ)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(\tilde{\beta}) & I \\ I & NJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -(NJ)^{-1} & I \end{bmatrix}$$

これらは、非負定値行列となるので、任意の  $x, y \in \mathbb{R}^{p+1}$  に対して、 $z = [x, y]^T$  として、

$$z^T \begin{bmatrix} V(\tilde{\beta}) - (NJ)^{-1} & 0 \\ 0 & NJ \end{bmatrix} z = x^T \{V(\tilde{\beta}) - (NJ)^{-1}\} x + y^T (NJ) y \geq 0$$

が成り立つ。このとき、 $y = 0$  でも成り立つので、 $V(\tilde{\beta}) - (NJ)^{-1}$  は非負定値である。

したがって、Cramer-Rao の不等式の成立が示された。

43. (a)  $E[(\tilde{\beta} - \beta)(\nabla l)^T] = I \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$  の、両辺のトレースを取って、

$$p + 1 = \text{tr} \{E[(\tilde{\beta} - \beta)(\nabla l)^T]\} = \text{tr} \{E[(\nabla l)^T(\tilde{\beta} - \beta)]\} = E[(\tilde{\beta} - \beta)^T(\nabla l)]$$

よって、題意は示された。

(b)

$$\begin{aligned}
E \left[ \left\| X (X^T X)^{-1} \nabla l \right\|^2 \right] &= \text{tr} \left\{ E \left[ (\nabla l)^T (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} (\nabla l) \right] \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ E \left[ (\nabla l)^T (X^T X)^{-1} (\nabla l) \right] \right\} = \text{tr} \left\{ E \left[ (X^T X)^{-1} (\nabla l)(\nabla l)^T \right] \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ (X^T X)^{-1} E \left[ (\nabla l)(\nabla l)^T \right] \right\} = \text{tr} \left\{ (X^T X)^{-1} \frac{1}{\sigma^2} X^T X \right\} = \frac{1}{\sigma^2} \text{tr} \{ I_{p+1} \} = \frac{p+1}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\left\{ E \left[ (\tilde{\beta} - \beta)^T \nabla l \right] \right\}^2 &= \left\{ E \left[ (\tilde{\beta} - \beta)^T X^T X (X^T X)^{-1} \nabla l \right] \right\}^2 \\
&\leq E \left[ \left\| (\tilde{\beta} - \beta)^T X^T \right\|^2 \right] E \left[ \left\| X (X^T X)^{-1} \nabla l \right\|^2 \right] = E \left[ \|X(\tilde{\beta} - \beta)\|^2 \right] E \left[ \left\| X (X^T X)^{-1} \nabla l \right\|^2 \right]
\end{aligned}$$

ただし、2 行目から 3 行目への変形で、Schwartz の不等式を用いた。したがって、

$$(p+1)^2 \leq \frac{p+1}{\sigma^2} E \left[ \|X(\tilde{\beta} - \beta)\|^2 \right] E \left[ \|X(\tilde{\beta} - \beta)\|^2 \right] \geq (p+1)\sigma^2$$

44. (a)

$$\begin{aligned}
\log f(u \mid x, \gamma) &= -\frac{1}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (u - x\gamma)^2 (u - x\gamma)^2 \\
\{(u - x\beta) - x(\gamma - \beta)\}^2 &= (u - x\beta)^2 - 2(\gamma - \beta)^T x^T (u - x\beta) + (\gamma - \beta)^T x^T x (\gamma - \beta)
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\log f(u \mid x, \gamma) &= -\frac{1}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (u - x\beta)^2 + \frac{1}{\sigma^2} (\gamma - \beta)^T x^T (u - x\beta) - \frac{1}{2\sigma^2} (\gamma - \beta)^T x^T x (\gamma - \beta)
\end{aligned}$$

となる。これを、 $(x, u) = (x_1, z_1), \dots, (x_N, z_N)$  として和を取ると、

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N \log f(z_i \mid x_i, \gamma) \\
&= \frac{N}{2} \log 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (z_i - x_i\beta)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (\gamma - \beta)^T x_i^T (z_i - x_i\beta) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (\gamma - \beta)^T x_i^T x_i (\gamma - \beta) \\
&= \frac{N}{2} \log 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \|z - X\beta\|^2 - \frac{1}{\sigma^2} (\gamma - \beta)^T X^T (z - X\beta) + \frac{1}{2\sigma^2} (\gamma - \beta)^T X^T X (\gamma - \beta)
\end{aligned}$$

となる。よって、示された。

(b)  $E[z - X\beta] = 0$ ,

$$\begin{aligned}
& E \left[ \|z - X\beta\|^2 \right] - E_Z \left[ \sum_{i=1}^N \log f(z_i \mid x_i, \gamma) \right] \\
&= \frac{N}{2} \log 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2} N\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \|X(\gamma - \beta)\|^2 = \frac{N}{2} \log 2\pi\sigma^2 e + \frac{1}{2\sigma^2} \|X(\gamma - \beta)\|^2
\end{aligned}$$

(c) (4.8) の値は、

$$- \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \{\log f(z \mid x_i, \gamma)\} f(z \mid x_i, \beta) dz$$



として書けて、KL 情報量の和は、

$$\sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(z | x_i, \beta) \log \frac{f(z | x_i, \beta)}{f(z | x_i, \gamma)} dz = E_Z \left[ \sum_{i=1}^N \log \frac{f(z | x_i, \beta)}{f(z | x_i, \gamma)} \right] = \frac{1}{2\sigma^2} \|X(\gamma - \beta)\|^2$$

このとき、 $\gamma = \hat{\beta}$  を最小二乗法によって求めると、

$$E \left[ \|X(\hat{\beta} - \beta)\|^2 \right] = E \left[ \text{tr} \left\{ (\hat{\beta} - \beta)^T X^T X (\hat{\beta} - \beta) \right\} \right] = \text{tr} \left\{ V[\hat{\beta}] X^T X \right\} = \text{tr} (\sigma^2 I) = (p+1)\sigma^2$$

したがって、(b) の平均的な最小値は、

$$\frac{N}{2} \log 2\pi\sigma^2 e + \frac{p+1}{2}$$

であり、その最小値は最小二乗法によって実現できる。

(d)

$$\frac{N}{2} \log (2\pi\sigma_k^2 e) + \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2} (N \log \sigma_k^2 + k) - \frac{N}{2} \log 2\pi + \frac{N+1}{2}$$

第 2 項以降は  $k$  に依らないから、題意は示された。

45.

$$E[U^n] = \prod_{i=1}^n (m+2(i-1))$$

(a)  $\log(x+1)$  の Maclaurin 展開、

$$\log(x+1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-x)^i}{-i} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

を用いると、

$$\begin{aligned} E \left[ \log \frac{U}{m} \right] &= E \left[ \log \left( \frac{U}{m} - 1 + 1 \right) \right] \\ &= E \left[ \left( \frac{U}{m} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{U}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{U}{m} - 1 \right)^3 - \dots \right] \\ &= E \left[ \frac{U}{m} - 1 \right] - \frac{1}{2} E \left[ \left( \frac{U}{m} - 1 \right)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

となる。

(b)

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{U}{m} - 1 \right] &= \frac{1}{m} E[U] - 1 = \frac{1}{m} \cdot m - 1 = 0, \\ E \left[ \left( \frac{U}{m} - 1 \right)^2 \right] &= \frac{1}{m^2} E[(U-m)^2] = \frac{1}{m^2} \{m(m+2) - 2m^2 + m^2\} = \frac{2}{m} \end{aligned}$$

(c)

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^n 1^j (-1)^{n-j} \binom{n}{j} = (1-1)^n = 0$$

(d)

$$E[(U - m)^n] = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} m^{n-j} \prod_{i=1}^j (m + 2(i-1))$$

であり、各  $j$  に対する  $m^{n-j} \prod_{i=1}^j (m + 2(i-1))$  の  $n$  次の係数は 1 である。したがって、求める  $n$  次の係数は、

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^n (-1)^j 1^{n-j} \binom{n}{j} = (-1 + 1)^n = 0$$

(e) 各  $j$  に対する  $m^{n-j} \prod_{i=1}^j (m + 2(i-1))$  の  $n-1$  次の係数は、

$$\sum_{i=1}^j 2(i-1) = j(j-1)$$

である。したがって、求める  $n-1$  次の係数は、

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} j(j-1) &= \sum_{j=2}^n \frac{n!}{(n-j)!(j-2)!} (-1)^{n-j-2} \\ &= n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} (-1)^{n-2-i} 1^i = n(n-1)(-1+1)^{n-2} = 0 \end{aligned}$$

(f)  $n \geq 3$  に対して、(d) および (e) より、

$$E[(U - m)^n] = O\left[\frac{1}{m^2}\right]$$

が成り立つことがわかる。ここで、

$$\begin{aligned} U &= \frac{N\hat{\sigma}^2(S)}{\sigma^2(S)} \sim \chi_{N-k(S)-1}^2, \\ m &= N - k(S) - 1 \end{aligned}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} E\left[\log \frac{U}{m}\right] &= E\left[\log \left(\frac{N\hat{\sigma}^2(S)}{\sigma^2(S)} / (N - k(S) - 1)\right)\right] = E\left[\log \left(\frac{\hat{\sigma}^2(S)}{N - k(S) - 1} / \frac{\sigma^2(S)}{N}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{N - k(S) - 1} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = -\frac{1}{N} - \frac{k(S) + 1}{N\{N - k(S) - 1\}} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = -\frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} E\left[\log \frac{\hat{\sigma}^2(s)}{\sigma^2}\right] &= E\left[\log \frac{U}{N}\right] = \log \frac{m}{N} + E\left[\log \frac{U}{m}\right] \\ &= \log \left\{1 - \frac{k(S) + 1}{N}\right\} - \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = -\frac{k(S) + 2}{N} + O(1/N^2) \end{aligned}$$

となる。よって、題意は示された。

## 第5章 スパース推定

49.

$$L = \frac{1}{N} \|y - X\beta\|^2 + \lambda \|\beta\|_2^2$$

を、 $\beta$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{2}{N} X^T (y - X\beta) + 2\lambda\beta = \left(-\frac{2}{N} X^T X + 2\lambda I\right) \beta - \frac{2}{N} X^T y$$

となるので、 $\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$  となるためには、

$$(X^T X + N\lambda I) \beta = X^T y$$

このとき、解  $\beta = \hat{\beta}$  が存在するためには、 $X^T X + N\lambda I$  が正則であることが必要十分となる。

まず、 $\lambda > 0$  であると仮定すると、 $X^T X \in \mathbb{R}^{p \times p}$  が非負定値となることから、 $X^T X$  の固有値  $\mu_1, \dots, \mu_p$  はすべて非負。したがって、 $X^T X + N\lambda I$  の固有多項式を  $\varphi(t)$  とすると、

$$\varphi(t) = \det(X^T X + N\lambda I - tI) = (t - \mu_1 - N\lambda) \cdots (t - \mu_p - N\lambda)$$

となるから、 $N\lambda > 0$  より、これらの根、すなわち  $X^T X + N\lambda I$  の固有値はすべて非負となる。

逆に、 $X^T X + N\lambda I$  が正則と仮定すると、任意の  $i = 1, \dots, p$  に対して、

$$\mu_i + N\lambda > 0$$

である。 $\mu_i$  は  $X^T X$  の固有値であり、 $X \in \mathbb{R}^{N \times p}$  が任意ならば、 $\mu_i$  は任意の非負の値を取りうる。したがって、(49.1) が常に成り立つためには、 $\lambda > 0$  が必要。よって、題意は示された。

50. (a)

$$f(x) \geq f(x_0) + z(x - x_0)$$

$x > x_0$  で (50.1) が成立するためには、

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq z$$

が必要となる。また、 $x < x_0$  で (50.1) が成立するためには、

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq z$$

が必要となる。したがって、 $z$  は  $x = x_0$  における  $f$  の左微分以上で、なおかつ右微分以下であることが必要となり、 $f$  が  $x = x_0$  で微分可能だから、 $z = f'(x_0)$  が必要となる。逆に、 $z = f'(x_0)$  となるとき、 $f$  が凸関数であることから、(50.1) が成り立つ。よって、題意は示された。

(b)  $zx \leq |x|$  の成立のためには、 $\begin{cases} x = 0 \text{ のとき} & \text{無条件に成立} \\ x > 0 \text{ のとき} & z \leq 1 \text{ が必要} \\ x < 0 \text{ のとき} & z \geq -1 \text{ が必要。} \end{cases}$  となる。したがって、

(50.2) の成立には、 $|z| \leq 1$  が必要。逆に、 $|z| \leq 1$  のとき、

$$zx \leq |z||x| \leq |x|$$

となるので、(50.2) が成立する。よって、題意は示された。

- (c) i.  $x_0 < 0$  のとき、(a) より劣微分は、 $\{-1\}$   
 ii.  $x_0 = 0$  のとき、 $f(x) \geq f(x_0) + z(x - x_0) \Leftrightarrow |x| \geq zx$  となるので、(b) より劣微分は、 $[-1, 1]$   
 iii.  $x_0 > 0$  のとき、(a) より劣微分は、 $\{1\}$   
 (d)  $f(x) = x^2 - 3x + |x|$  のとき、

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ x^2 - 4x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x > 0 \\ 2x - 3 + [-1, 1] = -3 + [-1, 1] = [-4, -2] & x = 0 \\ 2x - 4 & x < 0 \end{cases}$$

したがって、この  $f(x)$  は、 $x = 1$  で極小となる。次に、 $f(x) = x^2 + x + 2|x|$  のとき、

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq 0, \\ x^2 - x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \geq 0, \\ 2x + 1 + 2[-1, 1] = 1 + 2[-1, 1] = [-1, 3], & x = 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

したがって、この  $f(x)$  は  $x = 0$  で極小となる。

51.  $S_\lambda(x)$  は、符号関数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & (x < 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

を用いて、

$$S_\lambda(x) = \operatorname{sgn}(x) \max\{|x| - \lambda, 0\}$$

と書くことができる。

52.

$$L = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (y_i - x_i \beta)^2 + \lambda |\beta|$$

の劣微分を考えると、

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i (y_i - x_i \beta) + \lambda \begin{cases} 1 & (\beta > 0) \\ -1 & (\beta < 0) \\ [-1, 1] & (\beta = 0) \end{cases} = -\frac{1}{N} (z - \beta) + \lambda \begin{cases} 1 & (\beta > 0) \\ -1 & (\beta < 0) \\ [-1, 1] & (\beta = 0) \end{cases}$$

となるので、

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -z + \beta + \lambda & (\beta > 0) \\ 0 = -z + \beta - \lambda & (\beta < 0) \\ 0 = -z + \beta + \lambda[-1, 1] & (\beta = 0) \end{cases} \Leftrightarrow \beta = \begin{cases} z - \lambda & (z > \lambda) \\ z + \lambda & (z < -\lambda) \\ 0 & \end{cases}$$

このとき、 $S_\lambda(x)$  を用いて、 $\beta = S_\lambda(z)$  と書ける。

55. 関数 `cv_glmnet` は、10-fold クロスバリデーションを行って、Lasso の処理を行うための最適な  $\lambda$  の値を決定することができる。関数 `glmnet` は、目的変数、説明変数、 $\lambda$  を引数とし、Lasso 処理を行う。選択された変数は V3, V4, V5 である。

56. (a)  $S$  を  $\beta_1$  で偏微分して、 $(\beta_1, \beta_2) = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$  を代入すると、 $0 = \sum_{i=1}^N -2x_{i,1} (y_i - \hat{\beta}_1 x_{i,1} - \hat{\beta}_2 x_{i,2})$ 。したがって、

$$\sum_{i=1}^N x_{i,1} (y_i - \hat{\beta}_1 x_{i,1} - \hat{\beta}_2 x_{i,2}) = 0$$

同様に  $\beta_2$  についても偏微分していくと、

$$\sum_{i=1}^N x_{i,2} (y_i - \hat{\beta}_1 x_{i,1} - \hat{\beta}_2 x_{i,2}) = 0$$

を得る。そして、

$$\begin{aligned} y_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2} &= y_i - \hat{y}_i + \hat{y}_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2} \\ &= y_i - \hat{y}_i + \hat{\beta}_1 x_{i,1} + \hat{\beta}_2 x_{i,2} - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2} = y_i - \hat{y}_i - (\beta_1 - \hat{\beta}_1) x_{i,1} - (\beta_2 - \hat{\beta}_2) x_{i,2} \end{aligned}$$

さらに、

$$\sum_{i=1}^N x_{i,1} (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^N x_{i,2} (y_i - \hat{y}_i) = 0$$

に注意して、題意の総和を展開していくと、

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N (y_i - \beta_1 x_{i,1} - \beta_2 x_{i,2})^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ (y_i - \hat{y}_i) - \left\{ (\beta_1 - \hat{\beta}_1) x_{i,1} + (\beta_2 - \hat{\beta}_2) x_{i,2} \right\} \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^N \left\{ (\beta_1 - \hat{\beta}_1) x_{i,1} + (\beta_2 - \hat{\beta}_2) x_{i,2} \right\}^2 \\ &= (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum_{i=1}^N x_{i,1}^2 + 2(\beta_1 - \hat{\beta}_1)(\beta_2 - \hat{\beta}_2) \sum_{i=1}^N x_{i,1} x_{i,2} + (\beta_2 - \hat{\beta}_2)^2 \sum_{i=1}^N x_{i,2}^2 + \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \end{aligned}$$

(b) A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1) とする。このとき、題意の  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$  の範囲は、 $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$  を中心とするような円と正方形が接するときに 4 辺 (頂点を除く) と接するようなものを除いた部分になる。

辺 AB について、そのような範囲は、直線 AD と直線 BC に挟まれた部分 (境界除く) のうち、辺 AB より上にある部分となる。他 3 辺についても同様に考えると、題意の  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$  の範囲が得られる。

(c) 正方形ではなく、原点を中心とすると単位円である場合は、

$$\left\{ (\hat{\beta}_1, 0); |\hat{\beta}_1| > 1 \right\} \cup \left\{ (0, \hat{\beta}_2); |\hat{\beta}_2| > 1 \right\}$$

と書ける。

## 第6章 非線形回帰

57. (a)  $L = \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j x_i^j \right)^2$  に対して、

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (p+1)}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1}$$

とおくと、 $L = \|y - X\beta\|^2$  と書ける。したがって、 $L$  を最小化するような  $\hat{\beta}$  は、6.より、 $X^T X$  が正則であるという仮定のもとで、

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

となる。ここで、 $\text{rank } X = \text{rank } X^T X$  が成り立つことより、 $X^T X \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$  が正則であるための条件は、 $\text{rank } X = p+1$  となることである。このとき、 $x_1, \dots, x_N$  のうち、相異なるものが  $p+1$  個存在するとして、それらを  $x_{(1)}, \dots, x_{(p+1)}$  として、行列

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & x_{(1)} & \cdots & x_{(1)}^p \\ 1 & x_{(2)} & \cdots & x_{(2)}^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{(p+1)} & \cdots & x_{(p+1)}^p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$$

を考えると、Vandermonde の不等式より、

$$\det X' = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq p+1} (x_{(i)} - x_{(j)}) \neq 0$$

となるので、 $\text{rank } X' = p+1$  となることから、 $\text{rank } X = p+1$  が成り立つ、逆に、 $x_1, \dots, x_N$  のうち異なるものが  $p$  個以下のときは、 $\text{rank } X < p+1$  となるから、 $X^T X$  は正則とならない。以上より、求める  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  が一意に定まる条件は、 $x_1, \dots, x_N$  のうち異なるものが  $p+1$  個以上存在することであり、そのもとでの解は、

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

である。

(b) (a) と同様に、

$$f_j := \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \{0\}, & j = 0 \\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & j = 1, \dots, p \end{cases}$$

$$L := \sum_{i=1}^N \left( y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j f_j(x_i) \right)^2$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_1(x_N) & f_2(x_N) & \cdots & f_p(x_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (p+1)},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1}$$

( $f_0(\cdot) = 1$ ) とおくと、 $L = \|y - X\beta\|^2$  と書けるので、 $L$  を最小化するような  $\beta = \hat{\beta}$  は、 $X^T X$  が正則 であるという仮定のもとで、

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

となる。そして、 $X^T X \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$  が正則であるための条件は、 $N \geq p+1$  であり、なおかつ  $X$  の  $p+1$  個の列ベクトル が線形独立であることである。

58. (a) 各  $i = 1, \dots, k+1$  と 3 次多項式  $f_{i-1}, f_i$  に対して、

$$\begin{cases} f_{i-1}(\alpha_i) = f_i(\alpha_i) \\ f_{i-1}^{(1)}(\alpha_i) = f_i^{(1)}(\alpha_i) \\ f_{i-1}^{(2)}(\alpha_i) = f_i^{(2)}(\alpha_i) \end{cases}$$

が成り立つことから、

$$\begin{cases} f_i(x) = \sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (x - \alpha_i)^j \\ f_{i-1}(x) = \sum_{j=0}^3 \delta_j (x - \alpha_i)^j \end{cases}$$

と書けば、

$$\begin{cases} f_i^1(x) = \sum_{j=1}^3 j \varepsilon_j (x - \alpha_i)^{j-1} \\ f_i^2(x) = \sum_{j=2}^3 j(j-1) \varepsilon_j (x - \alpha_i)^{j-2} \end{cases}$$

のようになるので、

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = f_i(\alpha_i) = f_{i-1}(\alpha_i) = \delta_0, \\ \varepsilon_1 = f_i^{(1)}(\alpha_i) = f_{i-1}^{(1)}(\alpha_i) = \delta_1 \\ 2\varepsilon_2 = f_i^{(2)}(\alpha_i) = f_{i-1}^{(2)}(\alpha_i) = 2\delta_2 \end{cases}$$

となり、 $\varepsilon_j = \delta_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) が成り立つ。したがって、

$$f_i(x) - f_{i-1}(x) = (\varepsilon_3 - \delta_3) (x - \alpha_i)^3$$

となるから、題意の  $\gamma_i$  は、 $\gamma_i = \varepsilon_3 - \delta_3$  と定めればよい。よって、題意は示された。

(b) ある  $K+4$  個の定数  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{K+4}$  が存在して、

$$f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 + \sum_{j=1}^K \beta_{j+4} (x - \alpha_j)_+^3$$

が成り立つこと、すなわち、任意の  $i = 0, 1, \dots, K$  および、任意の  $x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  に対して、

$$f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 + \sum_{j=1}^i \beta_{i+4} (x - \alpha_i)^3$$

が成り立つことを示す。  $i = 0$  のとき、  $x \in [\alpha_0, \alpha_1]$  で  $f(x) = f_0(x)$  となるので、ある  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  がただ一つ存在して、

$$f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$$

となるので、  $(*)$  が成り立つ。  $i = 1$  のとき、  $x \in [\alpha_1, \alpha_2]$  に対して、  $f_1(x) = f_0(x) + \gamma_1 (x - \alpha_1)^3$  となるから、  $\beta_5 = \gamma_1$  と定めれば、  $(*)$  が成り立つ。そして、  $\beta_1, \dots, \beta_{i+4}$  まで定まったとき、すなわち  $x \in [\alpha_0, \alpha_{i+1}]$  に対する  $f(x)$  の係数  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i+4}$  が既に定められているとき、

$$f_{i+1}(x) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{i+1} \gamma_j (x - \alpha_j)^3$$

から、  $\beta_{i+5} = \gamma_{i+1}$  とすれば、  $x \in [\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}]$  に対して、

$$f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 + \sum_{j=1}^{i+1} \beta_{j+4} (x - \alpha_j)^3$$

が成り立つ。よって、  $i = K - 1$  の場合まで考えると、題意の等式を満たすような  $\beta_1, \dots, \beta_{K+4}$  を定めることができる。よって、題意は示された。

60. (a)

$$g(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 \frac{(x - \alpha_1)^3}{\alpha_K - \alpha_1} + \dots + \gamma_K \frac{(x - \alpha_{K-2})^3}{\alpha_K - \alpha_{K-2}} + \gamma_{K+1} \frac{(x - \alpha_{K-1})^3}{\alpha_K - \alpha_{K-1}}$$

と書く時、自然な 3 次のスプライン曲線  $g(x)$  が  $x \geq \alpha_K$  で直線となることと、境界  $x = \alpha_K$  で 1 次、2 次微分係数がともに一致することから、

$$g''(\alpha_K) = 0$$

であることが必要になる。このとき、

$$g''(\alpha_K) = \sum_{i=3}^K 6\gamma_i \cdot \frac{\alpha_K - \alpha_1}{\alpha_K - \alpha_1} = 6 \sum_{i=3}^{K+1} \gamma_i$$

となることから、  $6 \sum_{i=3}^{K+1} \gamma_i = 0$ 、したがって

$$\gamma_{K+1} = - \sum_{j=3}^K \gamma_j$$

が成り立つ。

(b)  $j = 1, \dots, K - 1$ 、および  $x \geq \alpha_K$  について、

$$d_j(x) = \frac{(x - \alpha_j)^3 - (x - \alpha_K)^3}{\alpha_K - \alpha_j}$$



となるので、 $j = 1, \dots, K-2$  に対して、

$$\begin{aligned} h_{j+2}(x) &= d_j(x) - d_{K-1}(x) \\ &= \frac{(x - \alpha_j)^3 - (x - \alpha_K)^3}{\alpha_K - \alpha_j} - \frac{(x - \alpha_{K-1})^3 - (x - \alpha_K)^3}{\alpha_K - \alpha_{K-1}} \\ &= \frac{\{(x - \alpha_j)^3 - (x - \alpha_K)^3\}(\alpha_K - \alpha_{K-1})}{(\alpha_K - \alpha_j)(\alpha_K - \alpha_{K-1})} - \frac{\{(x - \alpha_{K-1})^3 - (x - \alpha_K)^3\}(\alpha_K - \alpha_j)}{(\alpha_K - \alpha_j)(\alpha_K - \alpha_{K-1})} \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、(60.1) 式の分子を整理していくと、

$$\begin{aligned} & \{(x - \alpha_j)^3 - (x - \alpha_K)^3\}(\alpha_K - \alpha_{K-1}) - \{(x - \alpha_{K-1})^3 - (x - \alpha_K)^3\}(\alpha_K - \alpha_j) \\ &= (-\alpha_j^3 + \alpha_K^3)(\alpha_K - \alpha_{K-1}) - (-\alpha_{K-1}^3 + \alpha_K^3)(\alpha_K - \alpha_j) \\ & \quad + 3x\{(\alpha_j^2 - \alpha_K^2)(\alpha_K - \alpha_{K-1}) - (\alpha_{K-1}^2 - \alpha_K^2)(\alpha_K - \alpha_j)\} \\ & \quad + 3x^2\{(-\alpha_j + \alpha_K)(\alpha_K - \alpha_{K-1}) - (\alpha_K - \alpha_{K-1})(\alpha_K - \alpha_j)\} \\ &= -(\alpha_K - \alpha_{K-1})(\alpha_K - \alpha_j)(\alpha_{K-1} - \alpha_j)(\alpha_j + \alpha_{K-1} + \alpha_K) \\ & \quad + 3x(\alpha_K - \alpha_{K-1})(\alpha_K - \alpha_j)(\alpha_{K-1} - \alpha_j) \\ &= (\alpha_K - \alpha_{K-1})(\alpha_K - \alpha_j)(\alpha_{K-1} - \alpha_j)(3x - \alpha_j - \alpha_{K-1} - \alpha_K) \end{aligned}$$

となるので、

$$h_{j+2}(x) = (\alpha_{K-1} - \alpha_j)(3x - \alpha_j - \alpha_{K-1} - \alpha_K)$$

が成り立つ。

(c) まず、任意の  $x \leq \alpha_1$  に対して、

$$d_j(x) = 0$$

となることに注意すると、任意の  $x \leq \alpha_1$  に対して、

$$g(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \sum_{j=3}^K \gamma_j \{d_{j-2}(x) - d_{K-1}(x)\} = \gamma_1 + \gamma_2 x$$

であり、これは  $x$  の線形関数である。次に、任意の  $x \geq \alpha_K$  に対して、

$$g(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \sum_{j=3}^K \gamma_j h_j(x)$$

となるが、(b) より  $j = 3, \dots, K$  に対して  $h_j(x)$  は高々1次の多項式となるから、 $g(x)$  も線形となる。よって、題意は示された。

62. (a) 自然な3次のスプライン関数  $g$  について、 $g''(x_1) = g''(x_N) = 0$  となることと、各区間  $[x_i, x_{i+1}]$  において3次微分係数が一定値(これを  $\gamma_i$  とする)となる

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_N} g''(x) h''(x) dx &= [g''(x) h'(x)]_{x_1}^{x_N} - \int_{x_1}^{x_N} g^{(3)}(x) h'(x) dx \\ &= 0 - \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \gamma_i h'(x) dx = - \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i \{h(x_{i+1}) - h(x_i)\} \end{aligned}$$

(b)  $\int_{x_1}^{x_N} g''(x)h''(x)dx$  の仮定の元で、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \{f''(x)\}^2 dx &\geq \int_{x_1}^{x_N} \{f''(x)\}^2 dx = \int_{x_1}^{x_N} \{g''(x) + h''(x)\}^2 dx \\ &= \int_{x_1}^{x_N} [\{g''(x)\}^2 + \{h''(x)\}^2] dx + 2 \int_{x_1}^{x_N} g''(x)h''(x)dx = \int_{x_1}^{x_N} [\{g''(x)\}^2 + \{h''(x)\}^2] dx \\ &\geq \int_{x_1}^{x_N} \{g''(x)\}^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{g''(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

ただし、最後で 60.(c) から、 $x \notin [x_1, x_N]$  で  $g''(x) = 0$  となることを用いた。よって、題意は示された。

(c) 自然な 3 次スプライン関数が  $g$  が、 $i = 1, \dots, N$  に対して  $f(x_i) = g(x_i)$  を満たすとき、 $h(x) = f(x) - g(x)$  とすると、 $h(x_i) = 0, i = 1, \dots, N$  となる。このとき、(b) の不等式も合わせて考えると、 $RSS(f, \lambda)$  を最小にするような任意の  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、

$$\begin{aligned} RSS(f, \lambda) &= \sum_{i=1}^N \{y_i - f(x_i)\}^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \{f''(x)\}^2 dx \geq \sum_{i=1}^N \{y_i - g(x_i)\}^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \{g''(x)\}^2 dx \\ &= RSS(g, \lambda) \end{aligned}$$

64. 題意の平滑化スプライン関数  $g$  は、

$$RSS(f, \lambda) = \sum_{i=1}^N \{y_i - f(x_i)\}^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \{f''(x)\}^2 dx$$

を最小にするような  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  全体の元であるとする。このとき、 $RSS(g, \lambda)$  の第 1 項は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \{y_i - g(x_i)\}^2 &= \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1(x_1) & \cdots & g_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_N) & \cdots & g_N(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} \right\|^2 = \|y - G\gamma\|^2 \end{aligned}$$

であり、第 2 項は、

$$\begin{aligned} \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \{g''(x)\}^2 dx &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \gamma_i g_i''(x) \sum_{j=1}^N \gamma_j g_j''(x) dx \\ &= \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_i \gamma_j \int_{-\infty}^{\infty} g_i''(x) g_j''(x) dx = \lambda \sum_{i=1}^N \gamma_i \sum_{j=1}^N \gamma_j g_{i,j}'' = \lambda \gamma^T G'' \gamma \end{aligned}$$

となるので、

$$RSS(g, \lambda) = \|y - G\gamma\|^2 + \lambda \gamma^T G'' \gamma$$

の両辺を  $\gamma$  で微分して整理すると、

$$\begin{aligned} 0 &= -2G^T(y - G\gamma) + 2\lambda G''\gamma \implies (G^T G + \lambda G'')\gamma = G^T y \\ &\implies \gamma = \hat{\gamma} = (G^T G + \lambda G'')^{-1} G^T y \end{aligned}$$

よって、前半部分の題意は示された。

67. (a) 行列を用いると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N K(x, x_i) (y_i - [1, x_i] \beta(x))^2 \\ &= (y - X\beta(x))^T \begin{pmatrix} K(x, x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K(x, x_N) \end{pmatrix} (y - X\beta(x)) \end{aligned}$$

と書き換えることができる。このとき、

$$W' = \begin{pmatrix} K(x, x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K(x, x_N) \end{pmatrix}$$

とすると、 $\sum_{i=1}^N K(x, x_i) (y_i - [1, x_i] \beta(x))^2 = (y - X\beta(x))^T W' (y - X\beta(x))$  となる。これを  $\beta$  で微分すると、 $-2X^T W' (y - X\beta(x))$  となるが、これが 0 に等しいとき、 $X^T W' y = X^T W' X \beta(x)$  より、

$$\hat{\beta}(x) = \beta(x) = (X^T W' X)^{-1} X^T W' y$$

を得る。したがって、

$$W = W' = \begin{pmatrix} K(x, x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K(x, x_N) \end{pmatrix}$$

であり、すなわち  $W$  は  $K(x, x_1), \dots, K(x, x_N)$  を対角成分とする対角行列である。

## 第8章 サポートベクトルマシン

75. (a)

$$\begin{cases} \epsilon_i = 0 \text{ のときは、} & \text{手前のマージン上にあるか、もしくはそうでない場合である。} \\ 0 < \epsilon_i < 1 \text{ のときは、} & \text{境界と手前のマージンの間にある。} \\ \epsilon_i = 1 \text{ のときは、} & \text{境界上にある。} \\ \epsilon_i > 1 \text{ のときは、} & \text{境界の反対側にある。} \end{cases}$$

(b) 少なくとも  $r$  個の異なる  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対して、 $y_i (\beta_0 + x_i \beta) < 0$  となるときに、解  $M > 0$  が存在すると仮定すると、その各  $i$  に対して、

$$y_i (\beta_0 + x_i \beta) \geq M (1 - \epsilon_i)$$

を満たすには、 $\epsilon_i > 1$  が必要であり、すなわち、 $\sum_{i=1}^N \epsilon_i > r$  が必要となる。このとき、

$\gamma \leq r$  となっているならば、 $\sum_{i=1}^N \epsilon_i \leq \gamma \leq r$  となるので、矛盾する。

(c) ある  $\gamma = \gamma_0$  において  $M$  を最適値  $M_0$  にするような  $(\beta, \beta_0, \epsilon_i)$  は、 $\gamma = \gamma_1 > \gamma_0$  の場合においても条件を満たすので、その場合における最適値  $M$  は、少なくとも  $M_0$  以上となる。

76. まず、(8.24) について、 $f_j(\beta) > 0$  となるような添字  $j \in \{1, \dots, m\}$  が存在するとき、 $\alpha_j$  の値を大きくすることにより、 $L(\alpha, \beta)$  の値をいくらでも大きくすることができる。一方で、任意の  $j \in \{1, \dots, m\}$  に対して  $f_j(\beta) \leq 0$  となるとき、 $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$  とすれば、 $L(\alpha, \beta)$  は最大値  $f_0(\beta)$  を取る。よって、(8.24) は示された。次に、任意の  $\alpha \in [0, \infty)^m, \beta \in \mathbb{R}^p$  について、

$$\sup_{\alpha' \geq 0} L(\alpha', \beta) \geq L(\alpha, \beta) \geq \inf_{\beta'} L(\alpha, \beta')$$

から、任意の  $\alpha \in [0, \infty)^m, \beta \in \mathbb{R}^p$  について、

$$\sup_{\alpha' \geq 0} L(\alpha', \beta) \geq \inf_{\beta'} L(\alpha, \beta')$$

が成り立つ。この不等式は、左辺で  $\beta$  について  $\inf$ 、右辺で  $\alpha$  について  $\sup$  を取っても成り立つので、文字を適宜置き換えることにより (8.25) が成り立つことがわかる。そして、

$$(p, m) = (2, 1)$$

$$L(\alpha, \beta) = \beta_1 + \beta_2 + \alpha(\beta_1^2 + \beta_2^2 - 1)$$

だから、

$$f_0(\beta) = \beta_1 + \beta_2$$

$$f_1(\beta) = \beta_1^2 + \beta_2^2 - 1$$

$$\alpha_1 = \alpha$$

とすればよく。(8.24) より、

$$\sup_{\alpha \geq 0} L(\alpha, \beta) = \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 & (\beta_1^2 + \beta_2^2 - 1 \leq 0) \\ \infty & (\beta_1^2 + \beta_2^2 - 1 > 0) \end{cases}$$

と書いて、これは  $\beta_1 = \beta_2 = -1/\sqrt{2}$  で最小値  $-\sqrt{2}$  を取る。したがって、(8.25) の左辺は  $-\sqrt{2}$  となる。

次に、 $\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = \frac{\partial L}{\partial \beta_2} = 0$  のとき、 $\begin{cases} 1 + 2\alpha\beta_1 = 0 \\ 1 + 2\alpha\beta_2 = 0 \end{cases}$  から、 $\beta_1 = \beta_2 = -1/(2\alpha)$  となるので、

$$\inf_{\beta} L(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} + \alpha \left\{ \left(-\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\alpha}\right)^2 - 1 \right\} = -\frac{1}{2\alpha} - \alpha = -\left(\alpha + \frac{1}{2\alpha}\right)$$

この値の最大値は、相加平均と相乗平均の大小関係から、 $\alpha = 1/(2\alpha), \alpha < 0$ 。すなわち  $\alpha = -1/\sqrt{2}$  のときにとり、その最大値は  $-\sqrt{2}$  である。よって、(8.25) で等号が成り立つ。

77. (a) (8.30) で、 $(f, x_0, x) \mapsto (f_0, \beta^*, \beta)$  として整理すると、

$$\begin{aligned} f_0(\beta^*) &\leq f_0(\beta) - \nabla f_0(\beta^*)^T (\beta - \beta^*) = f_0(\beta) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla f_i(\beta^*)^T (\beta - \beta^*) \\ &\leq f_0(\beta) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \{f_i(\beta) - f_i(\beta^*)\} = f_0(\beta) + \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(\beta) \leq f_0(\beta) \end{aligned}$$

ただし、最後の行の変形で、 $i = 1, \dots, m$  に対して  $\alpha_i \geq 0, f_i(\beta) \leq 0$  となることを用いた。

(b) (8.26) については、

$$\begin{aligned} f_0(\beta) &= \beta_1 + \beta_2, \\ f_1(\beta) &= \beta_1^2 + \beta_2^2 - 1 \end{aligned}$$

となるから、(8.27), (8.28), (8.29) はそれぞれ、

$$\begin{cases} \beta_1^2 + \beta_2^2 - 1 \leq 0, \\ \alpha (\beta_1^2 + \beta_2^2 - 1) = 0, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2\beta_1 \\ 2\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

となる。

78. まず、(8.27) より、 $i = 1, \dots, N$  について、

$$\begin{aligned} y_i(\beta_0 + x_i\beta) - (1 - \epsilon_i) &\geq 0 \\ \epsilon_i &\geq 0 \end{aligned}$$

が得られ、次に、(8.28) より、 $i = 1, \dots, N$  について、

$$\begin{aligned} \alpha_i \{y_i(\beta_0 + x_i\beta) - (1 - \epsilon_i)\} &= 0 \\ \mu_i \epsilon_i &= 0 \end{aligned}$$

が得られる、そして、(8.29) は、 $\begin{cases} \frac{\partial L_P}{\partial \beta_0} = 0, \\ \frac{\partial L_P}{\partial \beta} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L_P}{\partial \epsilon_i} = 0, \end{cases}$  とできるので、 $\begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0 \\ \beta - \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i x_i^T = 0, \\ C - \alpha_i - \mu_i = 0 \end{cases}$

が得られる。

79.  $L_P$  の、 $\beta_0, \beta$  における最適化を図るとき。(8.32), (8.34) から、 $L_P$  は以下のように書ける。

$$\frac{1}{2} \|\beta\|_2^2 + \sum_{i=1}^N (C - \mu_i - \alpha_i) \epsilon_i + \sum_{i=1}^N \alpha_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i (\beta_0 + x_i \beta) = \frac{1}{2} \|\beta\|_2^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_i - \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i x_i \beta$$

さらに、(8.33) を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\beta\|_2^2 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i x_i^T \right)^T \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i x_i^T \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j^T \\ - \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i x_i \beta &= - \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i x_i \sum_{j=1}^N \alpha_j y_j x_j^T = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j^T \end{aligned}$$

と書けるので、Lagrange 係数であった  $\alpha_i, \mu_i \geq 0, i = 1, \dots, N$  を引数とする関数、

$$L_D = \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j^T$$

を構成することができる。ただし、(8.32), (8.34) に注意すると、 $\alpha_i, i = 1, \dots, N$  の動く範囲は、

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C & (i = 1, \dots, N) \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0 \end{cases}$$

となる。この双対問題を解くことによって得られた  $\alpha_i, i = 1, \dots, N$  を (8.33) に代入することにより、 $\beta$  が得られる。

80.

$$y_i(\beta_0 + x_i\beta) > 1 \Rightarrow y_i(\beta_0 + x_i\beta) - (1 - \epsilon_i) > 0 (\cdot (8.37), (8.38)) \Rightarrow \alpha_i = 0, (\cdot (8.35))$$

$$0 < \alpha_i < C \Rightarrow \begin{cases} \mu_i > 0, (\cdot (8.34)) \\ y_i(\beta_0 + x_i\beta) - (1 - \epsilon_i) = 0, (\cdot (8.35)) \end{cases} \Rightarrow \epsilon_i = 0 (\cdot (8.36))$$

$$y_i(\beta_0 + x_i\beta) < 1 \Rightarrow \epsilon_i > 0 (\cdot (8.37)) \Rightarrow \mu_i = 0 (\cdot (8.36)) \Rightarrow \alpha_i = C (\cdot (8.34))$$

81. (a)  $\alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$  が成り立つとき、(8.33) より  $\beta = \mathbf{0}$ 、(8.34), (8.36) より、 $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_N = 0$  が成り立つことがわかる。このとき、任意の  $i = 1, \dots, N$  に対して、 $y_i(\beta_0 + x_i\beta) = 1$  が成り立つと仮定すると、

$$y_i\beta_0 = 1 > 0$$

となる。さらに、 $y_i \in \{-1, 1\}$  となることから、 $y_1 = \dots = y_N$  が必要となる。このとき、任意の  $i = 1, \dots, N$  に対して、 $(y_i, \beta_0) = (\pm 1, \pm 1)$  (複号同順) となる。よって、題意は示された。

- (b)  $y_i(\beta_0 + x_i\beta) \neq 1$  のもとで  $\alpha_i = C$  ならば  $\epsilon_i > 0$ ,  $\alpha_i = 0$  ならば  $\epsilon_i = 0$  が成り立つ。このとき、

$$\epsilon_* = \min_{i=1, \dots, N} \epsilon_i \geq 0$$

として、各  $\epsilon_i$  を、 $\epsilon_i - \epsilon_*$  に、 $\beta_0$  を  $\beta_0 + y_i\epsilon_*$  とそれぞれ置き換えると、 $y_i^2 = 1$  となることに注意すれば、

$$y_i(\beta_0 + y_i\epsilon_* + x_i\beta) = y_i(\beta_0 + x_i\beta) + \epsilon_*$$

が成り立つので、 $y_i(\beta_0 + x_i\beta) - (1 - \epsilon_i)$  は、

$$y_i(\beta_0 + x_i\beta) + \epsilon_* - (1 - \epsilon_i + \epsilon_*) = y_i(\beta_0 + x_i\beta) - (1 - \epsilon_i)$$

となり、置き換えても値は変化しない。このとき、(8.35) および、80. の 3 つ目の命題の対偶も合わせて考えると、 $\alpha_i = 0, C$  いずれの場合でも、(8.37) では等号が成立する。したがって、7 つの KKT 条件が成立する。このとき、置き換える前後で、

$$\epsilon_* \sum_{i=1}^N (C - \mu_i) = \epsilon_* \sum_{i=1}^N \alpha_i > 0$$

だけ減少するので、これは  $L_P$  の最適解にはならない。

- (c) (a)(b) および命題 80 より、 $0 < \alpha_i < C$  もしくは  $y_i(\beta_0 + x_i\beta) = 1$  となる添え字  $i$  が少なくとも 1 つ存在する。前者の場合においても、80. の 2 つの命題より、 $y_i(\beta_0 + x_i\beta) = 1$  が成り立つ。よって、題意は示された。

82.

$$L_D = \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i x_j^T, \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0, 0 \leq \alpha_i \leq C$$

を、

$$L_D = -\frac{1}{2}\alpha^T D_{mat}\alpha + d_{vec}^T \alpha, \quad A_{mat}\alpha \geq b_{vec}, \quad b_{vec} = [0, -C, \dots, -C, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^m$$

(2 つ目の不等式の、最初の  $meq$  個については等号成立) と、

$$A_{mat} \in \mathbb{R}^{m \times N}, \quad meq \in \mathbb{N}, \quad D_{mat} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad d_{vec} \in \mathbb{R}^N$$

に書き直すとき、

$$z = \begin{bmatrix} x_{1,1}y_1 & \cdots & x_{1,p}y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N,1}y_N & \cdots & x_{N,p}y_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times p}$$

とし、

$$m = 2N + 1, \quad A_{mat} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_N \\ -1 & & \\ & \ddots & \\ 1 & & -1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2N+1) \times N}, \quad meq = 1, \quad D_{mat} = zz^T,$$

$$d_{vec} = [1, \dots, 1]^T$$

とおけば、題意の双対問題と同値となる。

83.

$$\begin{aligned} K(x, y) &= (1 + x^T y)^2 = (1 + x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \\ &= 1 + 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_1^2 y_1^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_2^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, x_1^2, \sqrt{2}x_1 x_2, x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, \sqrt{2}y_1, \sqrt{2}y_2, y_1^2, \sqrt{2}y_1 y_2, y_2^2 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

したがって、写像  $\phi$  は

$$(x_1, x_2) \mapsto (1, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, x_1^2, \sqrt{2}x_1 x_2, x_2^2)$$

となる。

84. (a) 任意の  $f, g, h \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  に対して、 $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  とおくと、

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle, \\ \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \int_0^1 \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}h(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)h(x)dx + \beta \int_0^1 g(x)h(x)dx \\ &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle, \\ \langle f, f \rangle &= \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \geq 0 \quad (\text{等号成立は, } f \equiv 0 \text{ の場合のみ}) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $V$  の内積となる。

(b) 任意の  $x, y \in \mathbb{R}^p$  に対して、 $\langle x, y \rangle = (1 + x^T y)^2$  とする とき、

$$\langle 0 \cdot x, y \rangle = 1^2 = 1 \neq 0 = 0 \cdot \langle x, y \rangle$$

となる。これは、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  が線形性を持たないことを意味するので、 $V$  上の内積とはならない。

## 教師なし学習

90. (a) 各  $j = 1, \dots, p$  について、

$$\frac{1}{|C_k|} \sum_{i \in C_k} \sum_{i' \in C_k} (x_{i,j} - x_{i',j})^2 = 2 \sum_{i \in C_k} (x_{i,j} - \bar{x}_{k,j})^2$$

が成り立つことを示せば十分。(90.1) の左辺について、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|C_k|} \sum_{i \in C_k} \sum_{i' \in C_k} (x_{i,j} - x_{i',j})^2 \\ &= \frac{1}{|C_k|} \sum_{i \in C_k} \sum_{i' \in C_k} (x_{i,j} - \bar{x}_{k,j} + \bar{x}_{k,j} - x_{i',j})^2 \\ &= \frac{1}{|C_k|} \sum_{i \in C_k} \sum_{i' \in C_k} (x_{i,j} - \bar{x}_{k,j})^2 + \frac{1}{|C_k|} \sum_{i \in C_k} \sum_{i' \in C_k} (\bar{x}_{k,j} - x_{i',j})^2 \\ & \quad + \frac{2}{|C_k|} \sum_{i \in C_k} \sum_{i' \in C_k} (x_{i,j} - \bar{x}_{k,j})(\bar{x}_{k,j} - x_{i',j}) \end{aligned}$$

第1項と第2項は等しく、第3項は0となる。したがって、

$$\frac{1}{|C_k|} \sum_{i \in C_k} \sum_{i' \in C_k} (x_{i,j} - x_{i',j})^2 = \frac{2}{|C_k|} \sum_{i \in C_k} \sum_{i' \in C_k} (x_{i,j} - \bar{x}_{k,j})^2 = 2 \sum_{i \in C_k} (x_{i,j} - \bar{x}_{k,j})^2$$

右辺は、(90.1) の右辺に一致している。よって、題意の等式は示された。

(b) (a) より、スコア  $S$  は、

$$S = 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i \in C_k} \sum_{j=1}^p (x_{i,j} - \bar{x}_{k,j})^2 = 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i \in C_k} \|x_i - \bar{x}_k\|^2$$

と書ける。このとき、各  $k = 1, \dots, K$  および任意のベクトル  $x$  に対して、

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C_k} \|x_i - x\|^2 &= \sum_{i \in C_k} \|(x_i - \bar{x}_k) - (x - \bar{x}_k)\|^2 \\ &= \sum_{i \in C_k} \|x_i - \bar{x}_k\|^2 + \sum_{i \in C_k} \|x - \bar{x}_k\|^2 - 2(x - \bar{x}_k)^T \sum_{i \in C_k} (x_i - \bar{x}_k) \\ &= \sum_{i \in C_k} \|x_i - \bar{x}_k\|^2 + \sum_{i \in C_k} \|x - \bar{x}_k\|^2 \leq \sum_{i \in C_k} \|x_i - \bar{x}_k\|^2 \end{aligned}$$

これは、2つのステップを踏んでも、スコア  $S$  が増加することはないことを示している。



- (c) まず、1つ目のケースでは、3,10 がそれぞれクラスタ 1,2 の中心になり。0,6,10 から最も近いクラスタの中心がそれぞれ 3,3,10 となるので、処理を継続してもその状態は変わらない。このときのスコア  $S$  は、

$$S = 3^2 + 3^2 + 0^2 = 18$$

となる。次に2つ目のケースでは、0,8 がそれぞれクラスタ 1,2 の中心になり。0,6,10 から最も近いクラスタの中心がそれぞれ 0,8,8 となるので、処理を継続してもその状態は変わらない。このときのスコア  $S$  は、

$$S = 0^2 + 2^2 + 2^2 = 8$$

となる。

93. Centroid リンケージを適用するとき、はじめに (5,8), (9,0) が結合されて、クラスタ距離は  $\sqrt{4^2 + 8^2} = 80$  となる。このとき、中心は (7,4) となり、もう一方の中心 (0,0) と結合したときのクラスタ間の距離は  $\sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$  となり、最初の結合よりクラスタ間の距離が小さくなるため、樹形図の木が交差してしまう。

94. (a)  $\|\phi\|^2 = 1$  の元で、 $\|X\phi\|^2$  を最大化するような  $\phi$  を考える。このとき、KKT 条件を考えると、

$$L = \|X\phi\|^2 - \gamma (\|\phi\|^2 - 1)$$

として、 $\partial L / \partial \gamma = 0, \partial L / \partial \phi = 0$  となることであり、これを解くと、

$$X^T X \phi = \gamma \phi$$

を得る。このとき、 $\phi$  が  $X^T X$ 、そして  $\Sigma$  の固有ベクトルであることが必要。

$$\|X\phi\|^2 = \phi^T X^T X \phi = \phi^T X^T X \phi = \gamma \phi^T \phi = \gamma \|\phi\|^2 = \gamma$$

これを最大化するような  $\gamma$  は、 $X^T X$  の固有値のうち最大もの。このとき、 $\phi = \phi_1$  は  $\lambda_1$  の固有ベクトルとなるので、 $\Sigma \phi_1 = \lambda_1 \phi_1$  が成り立つ。

- (b) 対称行列の異なる固有空間に属するベクトルは、直交する。固有値がすべて異なるので、各固有空間の次元が1であって、固有ベクトルどうし直交する。

97.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \|x_i - x_i \Phi \Phi^T\|^2 &= \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 + \sum_{i=1}^N x_i \Phi \Phi^T (x_i \Phi \Phi^T)^T - 2 \sum_{i=1}^N x_i (x_i \Phi \Phi^T)^T \\ &= \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 - \sum_{i=1}^N x_i \Phi \Phi^T (x_i \Phi \Phi^T)^T = \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 - \sum_{i=1}^N x_i \Phi \Phi^T x_i^T = \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 - \sum_{i=1}^N \|x_i \Phi\|^2, \\ \sum_{i=1}^N \|x_i \Phi\|^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (x_i \phi_j)^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^N (x_i \phi_j)^2 = \sum_{j=1}^m \left\| \begin{pmatrix} x_1 \phi_j \\ \vdots \\ x_N \phi_j \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^m \|X \phi_j\|^2 \end{aligned}$$