『渡辺澄夫ベイズ理論 100 問 with R/Stan』の略解

鈴木 譲

2023 年 9 月 4 日

第 1 章

1

$$f(u,v)=\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)\ ,\ \left\{\begin{array}{l}u=r\cos\theta\\ v=r\sin\theta\end{array}\right.\qquad \text{とおくと、}$$

$$\begin{aligned}(1.4)=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)drd\theta=\frac{\pi}{2}\left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^\infty=\frac{\pi}{2}\\ (1.5)=&2\int_0^\infty\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du=2\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

が成立する．ただし、$x\mapsto\exp(-x^2/2)$ は偶関数であることを用いた．

2

(1.2) は偶関数であるので、$f(x)q(x-\mu)$ は奇関数．したがって、

$$\begin{aligned}E[X]&=\int_{-\infty}^\infty xq(x-\mu)dx\\ &=\int_{-\infty}^\infty(x-\mu)q(x-\mu)dx+\mu\int_{-\infty}^\infty q(x-\mu)dx\\ &=\mu+\int_{-\infty}^\infty y\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)dy=\mu\quad(y=x-\mu)\\ V[X]&=E\left[(X-\mu)^2\right]\\ &=\int_{-\infty}^\infty(\sigma z)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\sigma dz\quad\left(z=\frac{x-\mu}{\sigma},\quad\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sigma}\right)\\ &=\sigma^2\cdot\int_{-\infty}^\infty\frac{z^2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=\sigma^2\\ E\left[(x-\mu)^4\right]&=\int_{-\infty}^\infty(\sigma z)^4\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\sigma dz\\ &=\sigma^4\cdot\int_{-\infty}^\infty\frac{z^4}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=3\sigma^4\end{aligned}$$

が成立する．ただし、次式を用いた．

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} z(-z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z^3}{3}\right)' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^3}{3}(-z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
&= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz
\end{aligned}
$$

3

(1.9) の標準正規分布の確率密度関数は、$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = 1$, $\varphi(u) \geq 0$ を満たす．

$$
J = 2,\ u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\ v(\mu) = \left[\mu, -\frac{\mu^2}{2}\right],\ w(x) = [x, 1],\ \phi = [0, 1]
$$

とおくと、

$$
z\left([\phi_1, \phi_2]^\top\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\phi_2}} \exp\left(\frac{\phi_1}{2\phi_2}\right),\ z\left([0, 1]^\top\right) = \sqrt{2\pi},
$$

$$
\phi_n = \left[\sum_{i=1}^n x_i, n+1\right]^\top,\ z(\phi_n) = \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \exp\left\{\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{2(n+1)}\right\}
$$

が成立し、

$$
\begin{aligned}
Z(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \exp\left\{\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{2(n+1)}\right\}}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i=1}^n \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right)\right\} \\
p(\mu | x_1, \ldots, x_n) &= \exp\left\{\mu \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\mu^2}{2}(n+1)\right\} \Bigg/ \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \exp\left\{\frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{2(n+1)}\right\} \\
r(x | x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{z\left([\sum_{i=1}^n x_i + x, n+2]^\top\right)}{z\left([\sum_{i=1}^n x_i, n+1]^\top\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{n+2}{n+1}}} \exp\left\{-\frac{n+1}{2(n+2)} x^2 + \frac{1}{n+2} x \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \sum_{i=1}^n x_i\right\}
\end{aligned}
$$

をそれぞれ計算して、(1.10)–(1.12) を得る．ただし、最後の変形では、次式を用いた．

$$
\frac{z\left([\sum_{i=1}^n x_i + x, n+2]^\top\right)}{z\left([\sum_{i=1}^n x_i, n+1]^\top\right)} = \exp\left\{\frac{1}{2(n+2)}\left(\sum_{i=1}^n x_i + x\right)^2 - \frac{1}{2(n+1)}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2}} \Bigg/ \frac{1}{\sqrt{n+1}}
$$

4

(1.13) の標準正規分布の確率密度関数は、$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = 1$, $\varphi(u) \geq 0$ を満たす．

$$
J = 2,\ u(x) = 1,\ v(\theta) = [\log\theta, \log(1-\theta)],\ w(x) = [x, 1-x],\ \phi = [0, 0]
$$

とおくと、

$$z\left([\phi_1,\phi_2]^\top\right)=\int_\Theta \theta^{\phi_1}(1-\theta)^{\phi_2}d\theta,\ z\left([0,0]^\top\right)=1,\ \phi_n=[k,n-k],\ z(\phi_n)=z([k,n-k])$$

が成立し、

$$\begin{aligned}
Z(x_1,\ldots,x_n) &= \int_\Theta \theta^k(1-\theta)^{n-k}d\theta=\frac{(n-k)!k!}{(n+1)!}\\
Z(x_1,\ldots,x_n,1) &= \frac{(n-k)!(k+1)!}{(n+2)!}\\
Z(x_1,\ldots,x_n,0) &= \frac{(n-k+1)!k!}{(n+2)!}\\
p(\theta|x_1,\ldots,x_n) &= \theta^k(1-\theta)^{n-k}/Z(x_1,\ldots,x_n)\\
r(x|x_1,\ldots,x_n) &= \begin{cases}\dfrac{Z(x_1,\ldots,x_n,1)}{Z(x_1,\ldots,x_n)}, & x=1\\ \dfrac{Z(x_1,\ldots,x_n,0)}{Z(x_1,\ldots,x_n)}, & x=0\end{cases}
\end{aligned}$$

をそれぞれ計算して、(1.14)–(1.16) を得る．

7

$\Theta_*=\{\pm 1\}$, $p(x|1)\neq p(x|-1)$, $x\in\mathcal{X}$ より同質ではない．μ をどのような値にしても q は得られないので、実現可能ではない．Θ_* が 2 個の要素を含むので、正則ではない．(1.21) の右辺と左辺がそれぞれ

$$-(\mu_*-\mu)\frac{\mu_*+\mu}{2}\ ,\ (\mu_*-\mu)^2\left\{1+\left(\frac{\mu_*+\mu}{2}\right)\right\}$$

となる．$\mu_*=1$ のとき、$\mu=-1$ であれば、右辺が 0 で左辺が正の値をとるので、相対的に有限な分散をもたない．

8

$\Theta=\{\mu\in\mathbb{R}\mid 1\le\mu\le 2\}$ に制限するので、$\Theta_*=\{1\}$ （1 個の要素しかないので同質）．しかし、前問と同様、実現可能ではない．また、$\mu=1$ は端点なので、正則ではない．しかし、相対的に有限な分散をもつ．実際、$\frac{\mu_*+\mu}{2}\ge 1$ が成立する．

9

実現可能ではない．$\mu=0$ でのみ $\frac{\partial D(q||p)}{\partial\mu}$ を最小にする θ が 1 個の要素しかないので、同質．$\frac{\partial^2 D(q||p)}{\partial\mu^2}=1>0$ で端点でないので、正則．分散が $\mu^2\left(\dfrac{m}{m-2}+\dfrac{\mu^2}{4}\right)$、平均が $\dfrac{\mu^2}{2}$ となる．

10

実現可能であるので、命題 2 より相対的に有限な分散をもつ．また、Θ_* が 2 個の要素をもつため、正則ではない．Θ_* の 2 個の要素で同じ分布になるので、同質である．

11

実現可能であるので、命題 2 より相対的に有限な分散をもつ．また、Θ_* が 1 個の要素からなり、$\frac{\partial^2 D(q||p)}{\partial^2 \alpha^2} > 1$ が成立する．$\alpha = 1$ は端点ではないので、正則である．また、Θ_* が 1 個の要素からなるので、同質である．

12

$a_* = 0$ のとき、$a = 0$ または $b = 0$ であれば $K(a, b) = 0$ となる．$b_* = 0$ のとき、log の中の分子が 1 になるので、$a = 0$ または $b = 0$ であれば $K(a, b) = 0$ となる．

13

$(l, m) = (k+1, n-k+1) \iff (k, n) = (l-1, l+m-2)$ より、$B(k+1, n-k+1) = \dfrac{(n-k)!k!}{(n+1)!}$ は、$B(l, m) = \dfrac{(l-1)!(m-1)!}{(l+m-1)!}$ となる．

第 2 章

`model24.stan`, `modelX.stan`, `model26.stan` は、bitbucket からダウンロードしてください．

14

$$P(\theta'|\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} s(\theta'|\theta) \min\{1, \exp[-H(\theta') + H(\theta)]\}, & \theta' \neq \theta \\ s(\theta'|\theta) + 1 - Q(\theta), & \theta' = \theta \end{array} \right.$$

および $s(\theta'|\theta) = s(\theta|\theta')$ が成立するので、第 1 項が等しい．$\theta' = \theta$ のときは $\{1 - Q(\theta)\} \exp(-H(\theta)) = \{1 - Q(\theta')\} \exp(-H(\theta'))$ より、第 2 項も等しい．

15

$$\sum_{i=1}^{n} \log \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left\{ -\frac{(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2} \right\} \right]$$

一様分布に従って乱数 z を発生させ、$z < \exp(y - x)$ が成立すれば 1、しなければ 0 を返す．

16

`output` には提案された θ が、`accept_reject` にはアクセプトなら 1、リジェクトなら 0 の列が格納される．$\theta = (\mu, \sigma^2)$ の提案された $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, \ldots$ が `output` に、$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ が `output2` に格納される．

17

(2.4) と (2.5) より、

$$\begin{aligned}\frac{dH(p,\theta)}{dt} =&\nabla_p H(p,\theta)^\top \frac{dp(t)}{dt} + \nabla_\theta H(p,\theta)^\top \frac{d\theta(t)}{dt}\\ =&\nabla_p V(p)^\top \frac{dp(t)}{dt} + \nabla_\theta U(\theta)^\top \frac{d\theta(t)}{dt}\\ =&\sum_{j=1}^d \frac{\partial V(p)}{\partial p_j}\frac{dp_j(t)}{dt} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_j}\frac{d\theta_j(t)}{dt}\\ =&\sum_{j=1}^d \frac{\partial V(p)}{\partial p_j}\left(-\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_j}\right) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta_j}\frac{\partial V(p)}{\partial p_j} = 0\end{aligned}$$

20

$$\frac{\theta^{D+a-1}(1-\theta)^{N-D+b-1}}{\int_0^1 \theta^{D+a-1}(1-\theta)^{N-D+b-1}d\theta}$$

（分母は、$B(D+a, N-D+b)$ となる.）

21

$\mathbb{V}(x_*\hat{\beta}) = x_*\mathbb{V}(\hat{\beta}^\top\hat{\beta})x_*^\top = x_*\sigma^2(X^\top X)^{-1}x_*^\top$ となる．$x_*\hat{\beta}$ と e は独立なので、後者の分散を加えると、$\sigma^2\{x_*(X^\top X)^{-1}x_*^\top + 1\}$.

第 3 章

27

次の 2 式が成立する.

$$\begin{aligned}\overline{(a+bi)\,(c+di)} &= \overline{ac-bd+(bc+ad)i} = (ac-bd)-(bc+ad)i\\ \overline{a+bi}\cdot\overline{c+di} &= (a-bi)\,(c-di) = (ac-bd)-(bc+ad)i.\end{aligned}$$

この事実を用いると、以下が得られる.

$$\sum_j a_{i,j}\overline{u}_j = \sum_j \overline{a}_{i,j}\overline{u}_j = \overline{\sum_j a_{i,j}u_j},\ \overline{\lambda}\overline{u}_j = \overline{\lambda u_j}$$

$$A\overline{u} = \overline{A}\overline{u} = \overline{Au} = \overline{\lambda u} = \overline{\lambda}\overline{u}$$

28

$U^\top U = (\langle u_i, u_j\rangle) =$ 単位行列 であり、U は正則であるので、$U^\top = U^{-1}$, $UU^\top = UU^{-1} =$ 単位行列 となる.

29

(a) $x \in (a,b)$ に対して、$\epsilon := \min\{x-a, b-x\}/2$ とおくと、$(x-\epsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)$ が成立するので、(a,b) は開集合．$x \notin [a,b]$ に対して、$\epsilon := \min\{|x-a|, |b-x|\}/2$ とおくと、$(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset (-\infty, a) \cup (b, \infty) = [a,b]^C$ （$[a,b]$ の補集合）が成立し、$[a,b]$ の補集合が開集合になるので、$[a,b]$ は閉集合．

(b) $x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ に対して、$(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap \mathbb{R} = (x-\epsilon, x+\epsilon) > \{x\} \neq \{\}$ が成立する．他方、$x \notin \mathbb{Z}$, $\epsilon > 0$ に対して、$n < x < n+1$ であれば、$\epsilon := \min\{x-n, n+1-x\}/2$ として、$(x-\epsilon, x+\epsilon) \in (n, n+1)$ より、$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow (x-\epsilon, x+\epsilon) \notin \mathbb{Z}$ なる $\epsilon > 0$ が存在．

(c) $(i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$ の和集合であり、開集合である．

(d) $x \in \mathbb{Q}$ として、どのように $\epsilon > 0$ を選んでも、$(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset \mathbb{Q}$ とすることはできない．実際、そのように仮定して $n > \sqrt{2}/\epsilon$ を選ぶと、$x - \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q}$ が成立して矛盾．したがって、開集合ではない．$x \notin \mathbb{Q}$ として、どのように $\epsilon > 0$ を選んでも、$(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap Q \neq \{\}$ である．このことは、触点 x を $\mathbb{Q}$ が含んでいないことを意味し、$\mathbb{Q}$ が閉集合ではないことを意味する．

(e) $(x,y,z) = (0,0,0)$ を中心とする開球が領域に含まれないので、開集合ではない．$(x,y,z) = (1,0,0)$ は触点であるので、閉集合とはならない．

30

(3.4) は $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$、(3.5) は $f(x) = \log(1+x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ となる．これらを

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1}(0)}{(n-1)!} + R_n$$

に代入する．

31

$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$, $f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = -\dfrac{1+2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$．一般に、$n \geq 0$ に対して、$f^{(n)}(x) = \frac{g_n(x)}{x^{2n}}e^{-1/x}$ なる多項式 $g_n(x)$ が存在する．実際、$g_1(x) = 1$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) =& \frac{g_n'(x)x^{2n} - 2ng_n(x)x^{2n-1}}{x^{4n}}e^{-\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{g_n(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}} \\ =& \frac{x^2g_n'(x) - 2nxg_n(x) - g_n(x)}{x^{2(n+1)}}e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

とでき、$g_{n+1}(x) := x^2g_n'(x) - 2nxg_n(x) - g_n(x)$ が多項式になる．したがって、f は C^∞ 級である．

32

$|\alpha x| = |\alpha||x|$, $|x+y| \le |x| + |y|$, $|x| \ge 0$, $|x| = 0 \Longrightarrow x = 0$ が各 $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ について成立する．

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{\mathcal{X}} f(x)^2 q(x) dx}$$

とする．$f, g \in V \Longrightarrow f + g \in V$ は、

$$\int_{\mathcal{X}} \{f(x) + g(x)\}^2 q(x) dx \le 2 \int_{\mathcal{X}} f(x)^2 q(x) dx + 2 \int_{\mathcal{X}} g(x)^2 q(x) dx < \infty$$

より成立する．また、

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \sqrt{\int_{\mathcal{X}} f(x)^2 q(x) dx} = |\alpha| \|f\|$$

が成立する．$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ は、

$$\|f+g\|^2 = \int_{\mathcal{X}} \{f(x) + g(x)\}^2 q(x) dx = \int_{\mathcal{X}} f(x)^2 q(x) dx + \int_{\mathcal{X}} g(x)^2 q(x) dx + 2 \int_{\mathcal{X}} f(x) g(x) q(x) dx$$

に Cauchy-Schwarz の不等式

$$\left| \int_{\mathcal{X}} f(x) g(x) q(x) dx \right| \le \sqrt{\int_{\mathcal{X}} f(x)^2 q(x) dx} \sqrt{\int_{\mathcal{X}} g(x)^2 q(x) dx} = \|f\| \|g\|$$

を適用して得られる．さらに、$\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ がほとんど至るところで収束する．

33

{ 表, 裏 }, { 表 }, { 裏 }, {}

34

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-\mu)^2] =& \mathbb{E}[(X-\mu)^2 I(|X-\mu| \ge k) + (X-\mu)^2 I(|X-\mu| < k)] \\
\ge& \mathbb{E}[(X-\mu)^2 I(|X-\mu| \ge k)] \ge \mathbb{E}[k^2 I(|X-\mu| \ge k)] = k^2 P(|X-\mu| \ge k)
\end{aligned}$$

36

m が大きくなると乱数が正規分布に従う．n が大きくなると、大数の法則によって、ヒストグラムの各値が正しくなる．

38

(a) $h(x) = g(a_i)$, $x \in (a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, n$ より、任意の $\epsilon > 0$ について、$n \to \infty$ としたときに、

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| \leq& |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[h(X_n)]| + |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[g(X)]| + |\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)]| \\ \leq& \mathbb{E}[|g(X_n) - h(X_n)|] + \mathbb{E}[|h(X) - g(X)|] + |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(X_n)]| \\ <& 2\epsilon + \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF_X(x) - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF_{X_n}(x) \right| \\ \leq& 2\epsilon + \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{a_{i-1}}^{a_i} h(x) \{dF_X(x) - dF_{X_n}(x)\} \right| \\ \leq& 2\epsilon + \sum_{i=1}^{k} |g(a_i)| \int_{a_{i-1}}^{a_i} |dF_X(x) - dF_{X_n}(x)| < 3\epsilon\end{aligned}$$

とできることによる．

(b) ヒントにある $g_{a,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について、

$$F_{X_n}(a) \leq \mathbb{E}[g_{a,m}(X_n)] \leq F_{X_n}\left(a + \frac{1}{m}\right)$$

が成立する．$\mathbb{E}[g_{a,m}(X_n)] \to \mathbb{E}[g_{a,m}(X)]$ $(n \to \infty)$ が成立することを用いると $F_X(a) \leq \mathbb{E}[g_{a,m}(X)] \leq F_X(a + \frac{1}{m})$ が得られる．最後に、$a \in \mathbb{R}$ は分布関数の連続点であることを用いる．F_X, F_{X_n} はともに右連続ゆえ、$|\mathbb{E}[g_{a,m}(X)] - F_X(a)|$, $|\mathbb{E}[g_{a,m}(X_n)] - F_{X_n}(a)|$ をともに任意の $\epsilon > 0$ 以内にすることができる．これと、命題の仮定より

$$\begin{aligned}&|F_{X_n}(a) - F_X(a)| \\ \leq& |\mathbb{E}[g_{a,m}(X)] - F_X(a)| + |\mathbb{E}[g_{a,m}(X_n)] - F_{X_n}(a)| + |\mathbb{E}[g_{a,m}(X)] - \mathbb{E}[g_{a,m}(X_n)]| \\ <& 3\epsilon\end{aligned}$$

が成立する．

39

(3.16) と (3.18) から成立する．

40

(3.23) から $\mu = \mu_{**}$ が成立する．これと、$\mu = \mu_*$, $\sigma^2 = \sigma_*^2$ を代入して、(3.25) は (3.27) になる．実現可能であれば、正規分布であって、$A = 0$, $B = 3(\sigma_{**}^2)^2$ となり、一致する．

41

$\nabla \left[v(\mu)^\top w(x)\right] = \nabla \left[\mu x - \frac{\mu^2}{2}\right] = x - \mu$ および $\nabla^2 \left[-v(\mu)^\top w(x)\right] = -1$ が成立する．

第 4 章

42

実現可能かつ正則なので $I = J$ となる．

$$J(\theta) = \theta_* \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\{-\log\theta\} + (1-\theta_*)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\{-\log(1-\theta)\} = \theta_* \frac{1}{\theta^2} + (1-\theta_*)\frac{1}{(1-\theta)^2}$$

に $\theta = \theta_*$ を代入して、$J(\theta_*) = \dfrac{1}{\theta_*(1-\theta_*)}$ を得る．

43

(a) $\|\cdot\|$ がノルムであることによる．

(b) 全体で sup をとるより、各項で sup をとる方が大きくなる．ϕ_1, ϕ_2 を入れかえても成立する．

44

最初の不等式は、

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{p(x_i|\theta_*)}{p(x_i|\theta)} = \mathbb{E}_X\left[\log\frac{p(X|\theta_*)}{p(X|\theta)}\right] - \frac{\eta_n(\theta)}{\sqrt{n}}$$

から、2 番目の不等式は sup をとった．最後の不等式は積分を 1 で上から抑えた．

45

最初の等号は θ_* のまわりを Taylor 展開し、$\nabla\mathbb{E}_X\left[-\log p(X|\theta)\right]|_{\theta=\theta_*} = 0$ および $J(\theta_*) = \nabla^2\mathbb{E}_X[-\log p(X|\theta)]|_{\theta=\theta_*}$ を用いて成立する．次の等式は、

$$\begin{aligned}
&\left\{\theta - \theta_* - \frac{1}{\sqrt{n}}J(\theta^1)^{-1}\nabla\eta_n(\theta^2)\right\}^\top J(\theta^1)\left\{\theta - \theta_* - \frac{1}{\sqrt{n}}J(\theta^1)^{-1}\nabla\eta_n(\theta^2)\right\}\\
=&(\theta-\theta_*)^\top J(\theta^1)(\theta-\theta_*) - 2(\theta-\theta_*)^\top J(\theta^1)\frac{J(\theta^1)^{-1}\nabla\eta_n(\theta^2)}{\sqrt{n}}\\
&+\left\{\frac{J(\theta^1)^{-1}\nabla\eta_n(\theta^2)}{\sqrt{n}}\right\}^\top J(\theta^1)\frac{J(\theta^1)^{-1}\nabla\eta_n(\theta^2)}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

となり、特に最後の項は、$\left\|\dfrac{J(\theta^1)^{-1/2}\nabla\eta_n(\theta^2)}{\sqrt{n}}\right\|^2$ とできる．

46

$\nabla\mathbb{E}[-\log p(X|\theta_*)] = 0$．行列 $J(\theta_*)$ が正則．Θ_* が単一の要素からなる．

47

事後分布の分散が n に反比例し、正則ではないため．

48

$$-\log r(x|x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{2}\log\left(2\pi\frac{n+2}{n+1}\right)+\frac{n+1}{2(n+2)}\left\{x-\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}^2$$

$\{\}^2$ の部分 $g(x)$ を、$\mathbb{E}_X[g(X)]$ としたものが G_n、$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(x_i)$ としたものが T_n となる.

49

各行はそれぞれ、`y_pred` の確率密度を `dens` に格納、その関数形を `f_pred` に格納、$f_{true}(x)\{-\log f_{pred}(x)\}$ を $f_{ge}(x)$ に格納、$\int_{-6}^{6}f_{ge}(x)dx$ を `ge` に格納.

50

$$s(x,\alpha)=\log\left[\int_\Theta\left\{\frac{p(x|\theta)}{p(x|\theta_*)}\right\}^\alpha p(\theta|x_1,\ldots,x_n)d\theta\right]$$

に関して、

$$\begin{aligned}
s(x,0)=&0\\
s'(x,0)=&-\mathcal{E}(x)-\log p(x|\theta_*)\\
s''(x,0)=&\int_\Theta\log p(x|\theta)^2p\left(\theta|x_1,\ldots,x_n\right)d\theta-\left\{\int_\Theta\log p(x|\theta)p\left(\theta|x_1,\ldots,x_n\right)d\theta\right\}^2\\
s(x,1)=&\log\left[\int_\Theta p(x|\theta)p(\theta|x_1,\ldots,x_n)d\theta\right]-\log p(x|\theta_*)
\end{aligned}$$

が得られる.

51

$s'(x,\alpha)=s_1(x,\alpha)$, $s''(x,\alpha)=s_2(x,\alpha)-\{s_1(x,\alpha)\}^2$, $s'_h(x,\alpha)=s_{h+1}(x,\alpha)-s_h(x,\alpha)s_1(x,\alpha)$

52

$\frac{1}{n}tr(o_P(1)J^{-1})+o_P(\frac{1}{n})=o_P(\frac{1}{n})$ の等号.

53

$c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$, $d_{ik}=\sum_k b_{ik}a_{kj}$ とおくと、$\sum_i\sum_k a_{ik}b_{ki}=\sum_i c_{ii}$, $\sum_j\sum_k b_{jk}a_{kj}=\sum_j d_{jj}$ が成立するので

$$AB\text{ のトレース}=\sum_i\sum_k a_{ik}b_{ki}=\sum_j\sum_k b_{jk}a_{kj}=BA\text{ のトレース}$$

が成立する.

第 5 章

54

$I_n J_n^{-1}$ は単位行列で大きさが d なので、トレースをとると d になる．

55

$$l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\log p(x_i, y_i|\beta, \sigma^2) = \frac{1}{2}\log 2\pi\sigma^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - \sum_{k=1}^{p} x_{i,k}\beta_k)^2}{2\sigma^2}$$

は、$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \sum_{k=1}^{p} x_{i,k}\hat{\beta}_k)^2$ のときに最小になり、そのときの l は $\dfrac{1}{2}\log 2\pi\hat{\sigma}^2 + \dfrac{1}{2}$ となる．

56

`S.min` は 2 乗誤差の最小値．`set.q` はそのときの変数の組み合わせ．`X`，`y`，`n`，`p` が大域変数．

57

$\mathbb{E}_X\left[\log \frac{p(X|\theta_*)}{p(X|\theta)}\right] \geq \epsilon_n$ であれば、十分大きな n で、$\mathcal{L}(\hat{\theta}) > \mathcal{L}(\theta_*)$ が成立する確率が 1 に収束する．$\nabla^2\mathcal{L}(\hat{\theta}) = 0$ であるので、平均値の定理より、$\nabla\mathcal{L}(\theta_*) + \nabla^2\mathcal{L}(\theta^1)(\hat{\theta} - \theta_*) = 0$ なる θ^1 が $\theta_*, \hat{\theta}$ の間に存在する．したがって、(5.29),(5.30) が成立する．

58

(a) $\mathbb{E}[X_1^2] = \nabla[X] = 1$ および $\mathbb{V}[X_1^2] = \mathbb{E}[X_1^4] - (\mathbb{E}[X_1^2])^2 = 3 - 1 = 2$ （第 1 章）．

(b) それぞれ独立なので、それぞれ $m, 2m$ となる．

59

(a) 命題 21 から (5.10),(5.11) が得られる．命題 20 と (4.13) を組み合わせて、$\mathbb{E}_X[-\log p(X|\hat{\theta})]$ および $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{-\log p(x_i|\hat{\theta})\}$ を評価して命題 22 が得られる．

(b) 命題 22 から証明の 2 行目、3 行目が得られる．命題 9 より $I = J$, (5.13) が得られる．

(c) 命題 19 の (4.29),(4.30) の平均をとって命題 21 を適用する．

60

WAIC において、(5.18) で定義される経験損失が T_n で、第 2 項の $\mathcal{V}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ が

```
colMeans(log_likelitiood^2) - colMeans(log_likelitiood)^2
```

となる．Stan の出力は、乱数の発生回数 $\times n$ の行列になっていて（それぞれが事後尤度)、その算術平均が `colMeans` になる．そして、これらは n 個の要素からなる行ベクトルからなり、その平均をとることで $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{V}(x_i)$ が得られる．

63

(5.20) に

$$\varphi(\theta) = \frac{\sqrt{\det J(\theta)}}{\int_\Theta \sqrt{\det J(\theta')}d\theta'}$$

を代入すると、

$$-\log\varphi(\theta_*) = -\frac{1}{2}\log\det J + \log\int_\Theta \sqrt{\det J(\theta)}d\theta$$

となり、

$$E_{X_1\cdots X_n}[F_n] = n\mathbb{E}[-\log p(X|\theta_*)] + \frac{d}{2}\log\frac{n}{2\pi} - \frac{n}{2}\cdot\frac{d}{n} + \log\int_\Theta \sqrt{\det J(\theta)}d\theta$$

が得られる.

65

`rowSums(log_likelihood)` で $\sum_{i=1}^n -\log p(x_i|\theta)$ が得られる. その事後平均をとったもの.

第 6 章

67

$\mathbb{Z} - \{\pm 1\}$

68

$$\begin{aligned}
&y^2 = x^3 + ax + b,\ 3x^2 + a = 0,\ 2y = 0 \\
\Longleftrightarrow &x\left(-\frac{a}{3} + a\right) + b = 0,\ 3x^2 + a = 0,\ y = 0 \\
\Longleftrightarrow &\begin{cases} a = b = 0, & (x, y) = (0, 0) \\ a \neq 0,\ 4a^3 + 27b^2 = 0, & (x, y) = (-\frac{3b}{2a}, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

となるので、$4a^3 + 27b^2 = 0$ が成立する.

69

(a) $x \neq y$, $x, y \in M$, $\epsilon := \frac{1}{3}dist(x, y)$ とすると、$z \in B(\epsilon, x) \Longrightarrow z \notin B(\epsilon, y)$

(b) $a = 2k - 1 \in \mathbb{Z}$ を含む最小の開集合は $\{a\}$、また $a + 1$ を含む最小の開集合は $\{a, a + 1, a + 2\}$ であるが、共通元として a が含まれる.

70

(a) $\phi_i^{-1}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_d)=[x_0:\cdots:x_{i-1}:1:x_{i+1}:\cdots:x_d]$ となり、$i<j$ として、これを ϕ_j に代入すると、

$$\begin{aligned}\phi_j([x_0:\cdots:x_{i-1}:1:x_{i+1}:\cdots:x_d]) =&\phi_j(\left[\frac{x_0}{x_j}:\cdots:\frac{x_{i-1}}{x_j}:\frac{1}{x_j}:\frac{x_{i+1}}{x_j}:\cdots:\frac{x_d}{x_j}\right])\\ =&\left(\frac{x_0}{x_j},\cdots,\frac{x_{i-1}}{x_j},\frac{1}{x_j},\cdots,\frac{x_{j-1}}{x_j},\frac{x_{j+1}}{x_j},\cdots,\frac{x_d}{x_j}\right)\end{aligned}$$

(b) $(u_x,u_xv_x,[1:u_x])=(u_yv_y,v_y,[v_y:1])\Longrightarrow u_xv_y=1,\ u_x=u_yv_y,v_y=u_xv_x$ より、

$$\begin{aligned}\phi_x(U_x\cap U_y)\to\phi_y(U_x\cap U_y),\quad (u_x,v_x)\mapsto\left(\frac{1}{v_x},u_xv_x\right)=(u_y,v_y)\\ \phi_y(U_x\cap U_y)\to\phi_x(U_x\cap U_y),\quad (u_y,v_y)\mapsto\left(u_yv_y,\frac{1}{u_y}\right)=(u_x,v_x)\end{aligned}$$

71

$$\begin{aligned}A=&\{(x,y)\times[x',y']\in\mathbb{A}^2\times\mathbb{P}^1\mid xy'=x'y\}\\ B=&\{(x,y)\times[x',y']\in\mathbb{A}^2\times\mathbb{P}^1\mid [x:y]=[x';y']\ \text{または}\ (x,y)=(0,0)\}\end{aligned}$$

$$z\in A\Longrightarrow\left\{\begin{array}{ll} z\in B, & (x,y)=(0,0)\\ [x:y]=[x':y'], & (x,y)\neq(0,0)\end{array}\right.\Longrightarrow z\in B$$

$$z\in B\Longrightarrow\left\{\begin{array}{ll} xy'-x'y=0, & (x,y)=(0,0)\\ xy'=x'y, & [x:y]=[x':y']\end{array}\right.\Longrightarrow z\in A$$

72

$$(x,y)=\left\{\begin{array}{l}(u_1u_2,u_2)\\ \\ (u_1,u_1u_2)\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}(v_1v_2,v_1v_2^2)\\ \\ (v_1,v_1^2v_2)\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}(w_1,w_1^3w_2)\\ (w_1w_2,w_1^2w_2^3)\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}(z_1z_2^2,z_1^2z_2^5)\\ (z_1^2z_2,z_1^5z_2^3)\end{array}\right.$$

73

	i	u_i	v_i	w_i	x	y	z
(3)	1	α_2	y	z	u_1w_1	v_1	w_1
(5)	2	x	β_2	$y+\alpha_1$	v_2	v_2w_2	$u_2(1-v_2)v_2$
(6)	3	x	y	γ_1	u_3	v_3	$u_3v_3(v_3w_3-1)$
(7)	4	x	γ_2	β_1	u_4	v_4w_4	$u_4v_4w_4(w_4-1)$

74

	x	y	z	w	Jacobian
(5)	x	$\xi_1\alpha_2\xi_3$	$\xi_3 - x\xi_1$	$\alpha_2\xi_3$	$\alpha_2\xi_3^2$
(7)	$\beta_2\alpha_1$	$\xi_1 w$	$\alpha_1 w - x\xi_1$	w	$\alpha_1 w$
(9)	x	$\gamma_2\beta_1 w$	$x\beta_1(w-\gamma_2)$	w	xw
(10)	x	$w(1+\delta_1\gamma_1)$	$x(1+\delta_1\gamma_1)(\gamma_1 w - 1)$	w	$w^2 x\gamma_1(1+\delta_1\gamma_1)$
(11)	x	$\xi_1 w$	$x\xi_1\{\delta_2(\xi_1-1)w-1\}$	w	$-xw^2\xi_1(1-\xi_1)$

第 7 章

75

$\dfrac{h_j+1}{\kappa_j} = \lambda,\ j=1,\ldots,d$ より、

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^z \gamma_d t^{\lambda-1}(-\log t)^{d-1}dt &= \frac{(d-1)!}{(z+\lambda)^d}\cdot\gamma_d = \frac{1}{\prod_{i=1}^d \kappa_i}\frac{1}{(z+\lambda)^d} \\ \int_{-\infty}^{\infty} t^z \int_{[0,1]^d} \delta(t-u^\kappa)u^h du &= \int_{[0,1]^d}(u^\kappa)^z u^h du = \frac{1}{\prod_{i=1}^d \kappa_i}\frac{1}{(z+\lambda)^d}\end{aligned}$$

が成立する．ただし、最初の式の等号は例 71 から、2 番目の式の等号はそれぞれ (7.4)、例 72 から導かれる．

76

(a)

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha(z+q)+\beta(z+p)(z+q)+\gamma(z+p)^2}{(z+p)^2(z+q)} \\ =&\frac{(\beta+\gamma)z^2+\{\beta(p+q)+\alpha+2\gamma p\}z+\alpha q^2+\beta pq+\gamma p^2}{(z+p)^2(z+q)}\end{aligned}$$

より、

$$\beta=-\gamma,\ \beta(p+q)+\alpha+2\gamma p=0,\ \alpha=\gamma(q-p),\ \alpha q^2+\beta pq+\gamma p^2=1$$

$$\gamma(q-p)q-\gamma pq+\gamma p^2=1,\ \gamma(q-p)^2=1,\ \gamma=\frac{1}{(q-p)^2},\ \beta=-\frac{1}{(q-\gamma)^2},\ \alpha=\frac{1}{q-p}$$

(b) $\dfrac{\sum_{k=1}^s\sum_{j=0}^{m_k} c_{k,j}(z+\lambda_k)^{m_k-j}}{\prod_{k=1}^s(z+\lambda_k)^{m_k}}\displaystyle\prod_{h\neq k}(z+\lambda_h)^{m_h}$ が z の $\sum_{k=1}^s m_k-1$ 次なので、制約式は $\sum_{k=1}^s m_k$ 個．したがって、そのような $c_{k,j},\ j=1,\ldots,m_k,\ k=1,\ldots,s$ が存在する．

77

$$\int_{-a}^a f_a(x)dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^a dx = 1$$

78

$\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k} c_{k,j} t^{\lambda_k-1}(-\log t)^{j-1}$ と書けるが、$t \to 0$ で λ^k が最小、m_k が最大の項が残る.

79

(a)

$$\begin{aligned}\Omega(\theta)d\theta &= \int_0^\infty \frac{dt}{n}\delta\left(\frac{t}{n}-u^{2k}\right)u^k \exp\left(-t+\sqrt{t}\xi_n(t)\right)b(u)dn \\ \delta(t-u^{2k})u^h b(u)du &= t^{\lambda-1}(-\log t)^{m-1}du^* + o\left(t^{\lambda-1}(-\log t)^{m-1}\right)\end{aligned}$$

下の式の t を上の式の t/n におきかえて、$n \to \infty$ として、上の式に適用する.

(b)

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \log\left(\sum_{\alpha\in A}\frac{(\log n)^{m_\alpha-1}}{n^{\lambda_\alpha}}I_\alpha + \sum_{\alpha\notin A}\frac{(\log n)^{m_{\alpha-1}}}{n^{\lambda\alpha}}I_\alpha\right) \\ &= \log\frac{(\log n)^{m-1}}{n^\lambda} + \log\left(1+\sum_{\alpha\notin A}\frac{n^{\lambda-\lambda_\alpha}(\log n)^{m_\alpha-m}I_\alpha}{\sum_{\alpha'\in A}I_{\alpha'}}\right)\end{aligned}$$

80

$$\begin{aligned}S_\lambda(a) &= \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t+a\sqrt{t}}dt \\ S'_\lambda(a) &= \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}e^{a\sqrt{t}}\sqrt{t}dt = \int_0^\infty t^{\lambda+\frac{1}{2}-1}e^{-t+a\sqrt{t}}dt = S_{\lambda+\frac{1}{2}}(a) \\ S''_\lambda(a) &= \int_0^\infty t^{\lambda+\frac{1}{2}-1}e^{-t}e^{a\sqrt{t}}\sqrt{t}dt = S_{\lambda+1}(a) \\ S_{\lambda+1}(a) &= \int_0^\infty \left(-e^{-t}\right)'\left(t^\lambda \exp(a\sqrt{t})\right)dt \\ &= \left[\left(-e^{-t}\right)t^\lambda\exp(a\sqrt{t})\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-t}\right)\left(t^\lambda\exp(a\sqrt{t})\right)'dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}\left(t^\lambda\exp(a\sqrt{t})\right)'dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}\frac{a}{2\sqrt{t}}t^\lambda\exp(a\sqrt{t})dt + \int_0^\infty e^{-t}\lambda t^{\lambda-1}e^{a\sqrt{t}}dt \\ &= \frac{a}{2}S_{\lambda+\frac{1}{2}}(a) + \lambda S_\lambda(a)\end{aligned}$$

これに $a=\xi_n(u)$ を代入して、$T[\cdot]$ を作用させて $T[S_\lambda(\xi_n(u))]$ で割る.

81

(a) (7.49) の対数をとると、

$$\log\left\{\int_\theta p\left(x_n|\theta\right)^\beta \frac{\prod_{i=1}^{n-1}p\left(x_1|\theta\right)^\beta}{Z_{n-1}(\beta)}\varphi(\theta)d\theta\right\} = -\log\int p\left(x_n|\theta\right)^{-\beta}\frac{\sum_{i=1}^{n}p\left(x_i|\theta\right)^\beta}{Z_n(\beta)}\varphi(\theta)d\theta$$

とできる．そして、両辺の対数の引数はそれぞれ、$\mathcal{E}_\beta^{-n}\left[p(x_n|\theta)^\beta\right], \mathcal{E}_\beta\left[p(x_n|\theta)^{-\beta}\right]$ となるので、

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\mathcal{E}_\beta^{-i}\left[p(x_i|\theta)^\beta\right] = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\mathcal{E}_\beta\left[p(x_i|\theta)^{-\beta}\right]$$

の両辺に $\mathbb{E}_{X_1\cdots X_n}[\cdot]$ を適用する．

(b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n'(0) =& -\frac{1}{n}\left(\lambda + \frac{1}{2}\mathcal{E}\left[\sqrt{t}\xi_n(u) \mid x_1,\ldots,x_n\right]\right)\\
\mathcal{T}_n'(0) =& -\frac{1}{n}\left(\lambda - \frac{1}{2}\mathcal{E}\left[\sqrt{t}\xi_n(u) \mid x_1,\ldots,x_n\right]\right)\\
\mathcal{G}_n''(0) =& \mathbb{E}_X[\mathcal{V}(X)]\\
\mathcal{T}_n''(0) =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{V}(x_i)
\end{aligned}$$

82

$\xi_n \to \xi$ の法則収束と、$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{V}[\sqrt{t}a(x_i,u)|x_1,\ldots,x_n] \to \mathbb{E}_X\mathcal{V}[\sqrt{t}a(X,u)|x_1,\ldots,x_n]$ の確率収束が同時に行われる．

83

命題 38 より、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{X_1\cdots X_n}[G_n] =& \mathbb{E}_X[-\log p(X|\theta_*)] + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\
=& E_{X_1\cdots X_n}[T_n] + \frac{2\nu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\
=& \mathbb{E}_{X_1\cdots X_n}\left[T_n + \frac{V_n}{n}\right] + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

84

逆温度 $\beta > 0$ を用いると、(7.23) および $\mathcal{E}[\cdot|x_1,\ldots,x_n]$ がそれぞれ

$$\sum_{i=1}^{n}\log\frac{p(x_i|\theta_*)^\beta}{p(x_i|g(u))^\beta} = n\beta u^{2k} - \sqrt{n}\beta u^k\xi_n(u)$$

および $\mathcal{E}_\beta[\cdot|x_1,\ldots,x_n]$ に一般化される．さらに、一般化された $S_\lambda(a) = \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t\beta+a\beta\sqrt{t}}dt$ については、関係式 $S_{\lambda+1}(a) = \frac{\lambda}{\beta}S_\lambda(a) + \frac{a}{2}S_{\lambda+\frac{1}{2}}$ が得られ、(7.27) が

$$\mathcal{E}_\beta[t|x_1,\ldots,x_n] = \frac{\lambda}{\beta} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_\beta\left[\sqrt{t}\xi_n(u) \mid x_1,\ldots,x_n\right]$$

に一般化される．この一般化された関係式から、(7.44)–(7.47) が得られる．

85

$$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\mathcal{E}_\beta^{-i}[p(x_i|\theta)] = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\mathcal{E}_\beta[p(x_i|\theta)^{1-\beta}]}{\mathcal{E}_\beta[p(x_i|\theta)^{-\beta}]}$$

`likelihood` は $\log p(x_i|\theta)$, `colMeans` は $\mathcal{E}_\beta$ を表している．

86

$\beta = 1$ のとき、(7.43) が $O_P(n^{-3/2})$ になる．

第 8 章

87

$F_n'(\beta) = \mathrm{WBIC}_n$, $F_n''(\beta) < 0$ であるので、$\mathrm{WBIC}_n = F_n'(\beta)$ は β の単調減少．また、$F_n(0) = 0$ であり、$F_n = F_n(1) = \int_0^1 F_n'(\beta)d\beta$ に平均値の定理を適用すると、

$$F_n = F_n'(\beta^1) = \mathcal{E}_{\beta^1}\left[-\sum_{i=1}^{n}\log p(x_i|\theta)\right]$$

なる $\beta = \beta^1$ $(0 < \beta^1 < 1)$ が存在．$F_n'(\beta)$ は β の単調減少関数であるから、F_n と WBIC_n の値が等しくなるような逆温度 $\beta > 0$ が存在する．

88

(7.15) が (8.23) の次の式に一般化され、$\beta \to 0$ のとき $\exp(\sqrt{\beta t}\xi_n(u)) = 1 + \sqrt{\beta t}\xi_n(u) + O_P(\beta)$ となることを用いて、$O_P\left(\frac{(\log n\beta)^{m-1}}{(n\beta)^\lambda}\right)$ の項を除くと成立する．

89

$Z(n)n^{d/2}$ が $n \to \infty$ のとき (8.11) で下界される．もし、$\lambda > d/2$ であれば (8.11) と $Z(n)\frac{n^\lambda}{(\log n)^{m-1}}$ の両方が正の値に収束し、$Z(n)$ が $(\log n)^{m-1}/n^\lambda$ の定数倍以下で $n^{-d/2}$ の定数倍以上になり、矛盾する．

90

θ_* が唯一で、$J(\theta^1)$ が正定値であること．

91

$$\mathbb{E}_Y\left[\log\frac{q(Y)}{p(Y|x)}\right]=\mathbb{E}_Y\left[\log\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{Y^2}{2}\right]-\mathbb{E}_Y\left[\log\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{1}{2}(Y-a\sigma(bx)-c\sigma(dx))^2\right]$$

(8.15) は、$(a,b,c,d)=(x,\xi_1 w, xw\,(\xi_1-1)\,\epsilon_1\delta_2-x\xi_1,w)$ を $p_k=ab^k+cd_k$ に代入．(8.16) は、$(a,b,c,d)=(x,\xi_1 w,xw\,(\xi_1-1)\,\xi_1\delta_2-x\xi_1,w)$ に対しての

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial a}{\partial x}&\frac{\partial a}{\partial \xi_1}&\frac{\partial a}{\partial \delta_2}&\frac{\partial a}{\partial w}\\ \frac{\partial b}{\partial x}&\frac{\partial b}{\partial \xi_1}&\frac{\partial b}{\partial \delta_2}&\frac{\partial b}{\partial w}\\ \frac{\partial c}{\partial x}&\frac{\partial c}{\partial \xi_1}&\frac{\partial c}{\partial \delta_2}&\frac{\partial c}{\partial w}\\ \frac{\partial d}{\partial x}&\frac{\partial d}{\partial \xi_1}&\frac{\partial d}{\partial \delta_2}&\frac{\partial d}{\partial w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&w&0&\xi_1\\ w(\xi_1-1)\xi_1\delta_2-\xi_1 & xw(2\xi_1-1)\delta_2-x & xw(\xi_1-1)\xi_1 & x(\xi_1-1)\xi_1\delta_2\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}$$

の行列式の絶対値.

92

(11) に関して、(8.15),(8.16) のように導出している．同様に (5),(7),(9),(10) についても行う．

93

$O_P(\sqrt{\log n})$ の変動を無視すれば同じになる．`slope` がそれを表している．

94

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}\min\left\{2H,H,\frac{1}{3}(H+4)\right\}=\frac{1}{2}\left\{H,\frac{H+4}{3}\right\}=\begin{cases}H/2, & H\le 2\\ (H+4)/2, & H\ge 2\end{cases}$$

$H=1$ のとき (左辺) = (右辺) = 1/2 が成立するので、$H\ge 2$ のとき

$$(\sqrt{H})^2+\sqrt{H}+H\le\frac{1}{3}(H+4)(2\sqrt{H}+1)$$

を示せば十分である．両辺を $2\sqrt{H}+1$ で割って、$3\sqrt{H}\le H+4$ となるので、この同値な不等式を示せばよい．これは、$H+4\ge 4\sqrt{H}$ より成立する．

95

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\frac{2}{\Gamma(\nu/2)}\left(\frac{\nu\sigma^2}{2}\right)^{\nu/2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right)\left(\frac{\nu\sigma^2+z^\top z}{2}\right)^{-\frac{\nu+N}{2}}\\ =&\frac{(2\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\Gamma(\nu/2)}\Gamma\left(\frac{v+N}{2}\right)\left(1+\frac{z^\top z}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+N}{2}}\left(\frac{\nu\sigma^2}{2}\right)^{-N/2}\\ =&\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\frac{1}{(\pi\nu)^{N/2}\left(\sigma^2\right)^{N/2}}\left(1+\frac{z^\top z}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+N}{2}}\end{aligned}$$

40 行目は `diag-post_multiply(X, lambda)` で、$X \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix}$ を表す．ただし X は行列、$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix}$ である．student t 分布の対数尤度を加えている．(ν, μ, σ) がパラメータ.

96

`qr` が QR 分解、`qr.Q` が直交行列、`qr.R` が上三角行列

97

$$l(s) = \left(s - \frac{M+H-N-r}{2}\right)^2 - \frac{(M+H-N-r)^2}{4} + (N-H)r + MH$$

$C^{(s)}$ もしくは $b^{(s)}$ のどこかの成分を ν として、$C^{(s)}$, $b^{(s)}$, $A^{(s)}$ の成分すべてに ν をかけて終わる．

99

$\theta = t^4$, $L = \log\left\{t^{4\beta}\left(1-t^4\right)^{n-k}\right\}$, $L' = \dfrac{4k}{t} - \dfrac{4t^3(n-k)}{1-t^4} = x\dfrac{k-t^4 n}{t\left(1-t^4\right)}$,

$$\mathbb{E}\left[(L')^2\right] = 16\mathbb{E}\left[\frac{\left(k-t^4 n\right)^2}{t^2\left(1-t^4\right)^2}\right] = 16\frac{nt^2}{1-t^4}$$

が成立する．したがって、Jeffreys の事前分布は $t/\sqrt{1-t^4}$ に比例する．また、$\frac{d\theta}{dt} = 4t^3$ であるから、

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} = \frac{4t^3 dt}{\sqrt{t^4\left(1-t^4\right)}} = \frac{4tdt}{\sqrt{1-t^4}}$$

100

$$\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta_i} = \begin{cases} r_i(x,\theta)\theta_1^{k_1}\cdots\theta_i^{k_i-1}\cdots\theta_d^{k_d}, & k_i \neq 0 \\ r_i(x,\theta)\theta_1^{k_1}\cdots\theta_d^{k_d}, & k_i = 0 \end{cases}$$

を代入する．