鈴木譲「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
3. 統計的学習
3.4 条件付確率の推定 (3)
強一致性を満足する最小のペナルティ項

鈴木譲

大阪大学

2009 年 12 月 24 日 (1)

あらまし

強一致性を満足する最小のペナルティ項

弱一致性と強一致性

弱一致性　推定した $\mathcal{S}$ が真の $\mathcal{S}^*$ に一致する確率が 1 に収束: $d_n \to \infty$ が必要十分

強一致性　有限回しか $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}^*$ が生じない z^∞ の集合に確率 1: $d_n = \log n$ で成立

問題

強一致性を満足する最小の $\{d_n\}$ は何か

定理 3.8, Suzuki, 2006

1. $\{d_n\} \succ \{2 \log \log n\}$ のとき，$IC^{(\mathcal{S}^*)}$ が確率 1 で真
2. $d_n \prec \log \log n$ で，$\mathcal{S}^*$ の過学習の状態分割が存在すれば，確率 1 で $IC^{(\mathcal{S}^*)}$ が最小とはならない事象が無限回生じる

定理 3.8 の証明

$\mathcal{S} \in \mathit{Under}(\mathcal{S}^*)$ のとき，定理 3.7 より，$d_n \to \infty$ で，確率 1 で

$$IC^{(\mathcal{S}^*)} < IC^{(\mathcal{S})}$$

$\mathcal{S} \in \mathit{Over}(\mathcal{S}^*)$ のとき，確率 1 で以下を示す

$$1 \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\mathcal{H}^{(\mathcal{S}^*)}(z^n) - \mathcal{H}^{(\mathcal{S})}(z^n)}{\log \log n} \leq K(\mathcal{S}) - K(\mathcal{S}^*) \tag{38}$$

重複対数の法則

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$: 独立な確率変数の列
$E[X_i] = 0$, $E[X_i^2] = 1$
$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$

定理 3.9: 重複対数の法則

任意の $\epsilon > 0$ で

1. 確率 1 で，$S_n \geq (1+\epsilon)\sqrt{2n \log\log n}$ が有限回生じる
2. 確率 1 で，$S_n \geq (1-\epsilon)\sqrt{2n \log\log n}$ が無限回生じる

定理 3.8 の証明 (続)

$\mathcal{S} \in Over(\mathcal{S}^*)$, $t \in \mathcal{S}^*$ として,

$$Z_k := \sum_{s \in \mathcal{S}(t)} \sum_{y \in \mathcal{Y}} u_{i,s} w_{y,j} \frac{I[X_k \in s](I[Y_k = y] - \theta_{y,s})}{\sqrt{p(s)\theta_{y,s}}}.$$

$S_n := \sum_{k=1}^{n} Z_k$ とおくと， $E[Z_k] = 0$ および確率 1 で

$$\frac{S_n}{\sqrt{n q_{ij}}} = \frac{u_{i,s} w_{y,j} \dfrac{c_{ys} - \theta_{ys} n_s}{\sqrt{p(s)\theta_{ys}}}}{u_{i,s} w_{y,j} \dfrac{c_{ys} - \theta_{ys} n_s}{\sqrt{\frac{n_s}{n}\theta_{ys}}}} \to 1$$

$$E[Z_k^2] = \frac{E[S_n^2]}{n} = E[q_{i,j}^2] = 1$$

定理 3.9 より，確率 1 で，各 $i = 1, \cdots, \alpha - 1$; $j = 1, \cdots, \beta - 1$ で

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{q_{i,j}}{\sqrt{2 \log \log n}} = 1$$

定理 3.8 の証明 (続)

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{\alpha-1}\sum_{j=1}^{\beta-1} q_{i,j}^2}{2\log\log n} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\alpha-1}\sum_{j=1}^{\beta-1} \limsup_{n\to\infty} \frac{q_{i,j}^2}{2\log\log n} = (\alpha-1)(\beta-1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{t\in\mathcal{S}^*}\sum_{i=1}^{\alpha-1}\sum_{j=1}^{\beta-1} q_{i,j}^2}{2\log\log n} \\
&\leq \sum_{t\in\mathcal{S}^*}\sum_{i=1}^{\alpha-1}\sum_{j=1}^{\beta-1} \limsup_{n\to\infty} \frac{q_{i,j}^2}{2\log\log n} = K(\mathcal{S}) - K(\mathcal{S}^*)
\end{aligned}
$$