

鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)

3. 統計的学習

3.3 MDL 基準

鈴木讓

大阪大学

2009 年 12 月 17 日

# あらまし

記述長

一般的なエントロピー

Markov 過程

MDL 基準

## 記述長

$$0 \log 0 := 0 \quad (\lim_{p \rightarrow 0} p \log p = 0)$$

$$\mathcal{H}(z^n) := \sum_{j=0}^{m-1} c_j \log \frac{n}{c_j}$$

## Stirling の公式

$$\Gamma(x) = (2\pi)^{1/2} x^{x-1/2} \exp[-x + \gamma(x)], \quad 0 < \gamma(x) < \frac{1}{12x}$$

$$\begin{aligned} l_\varphi(z^n) &= -\log Q_W(z^n) = \log \left\{ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(m/2)} \cdot \frac{\Gamma(n + m/2)}{\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(c_j + 1/2)} \right\} \\ &= \mathcal{H}(z^n) + \frac{m-1}{2} \log n + O(1) \end{aligned} \quad (21)$$

(証明: 106-107 ページ)

## 適応的符号化

$c_{z_i}(z^{i-1})$ :  $z^{i-1}$  における  $z_i$  の頻度

$$Q_W(z^n) = \prod_{i=1}^n \frac{Q_W(z^i)}{Q_W(z^{i-1})} = \prod_{i=1}^n \frac{c_{z_i}(z^{i-1}) + 1/2}{(i-1) + m/2}$$

適応的符号化: 送信側と受信側で各時点までで同じ推定結果を共有し、逐次符号化の仕方を変える

切上げを除くと、各時点で  $-\log \frac{c_{z_i}(z^{i-1}) + 1/2}{(i-1) + m/2}$  の長さで符号化

$m = 2, z^{10} = 0100011010$

$$\frac{0 + 1/2}{0 + 1} \cdot \frac{0 + 1/2}{1 + 1} \cdot \frac{1 + 1/2}{2 + 1} \cdot \frac{2 + 1/2}{3 + 1} \cdot \frac{3 + 1/2}{4 + 1} \cdot \frac{1 + 1/2}{5 + 1} \cdot \frac{2 + 1/2}{6 + 1} \cdot \frac{4 + 1/2}{7 + 1} \cdot \frac{3 + 1/2}{8 + 1} \cdot \frac{5 + 1/2}{9 + 1}$$

## $\theta$ の推定

- ▶ 前半:  $\theta_{z_i}$  の推定精度が良くない
- ▶  $\theta_{z_i}$  既知の場合と比較しての平均符号長の増分:  $\frac{m-1}{2} \log n$

$z^n \in Z^n(\Omega)$  から  $j \in Z(\Omega)$  の確率を推定

$$\frac{c_j(z^n) + a_j}{n + \sum_{k=0}^{m-1} a_k}, \quad a_0 = \cdots = a_{m-1} = \frac{1}{2} \quad (22)$$

## 一般的なエントロピー

独立性を仮定しない:

$$P_{Z^n}(z^n) = \prod_{i=1}^n P_{Z_i|Z_1^{i-1}}(z_i|z_1^{i-1}), \quad z^n \in Z^n(\Omega)$$

定常性を仮定:

$$P_{Z_{i+1}|Z_{i-k+1}^i}(z_{i+1}|z_{i-k+1}^i) = P_{Z_i|Z_{i-k}^{i-1}}(z_i|z_{i-k}^{i-1}), \quad k \geq 0, \quad z_{i-k}^{i+1} \in Z_{i-k}^{i+1}(\Omega) \quad (23)$$

$\Rightarrow$  エントロピー  $H := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(Z^n)}{n}$  が存在

## 一般的なエントロピー (続)

証明:

$$H(Z_{i+1}|Z_2^i) = H(Z_i|Z_1^{i-1}).$$

$Z_2^i = z_2^i$  のもとでの  $Z_1, Z_{i+1}$  の相互情報量

$$H(Z_{i+1}|Z_2^i = z_2^i) - H(Z_{i+1}|Z_1, Z_2^i = z_2^i) \geq 0$$

の  $Z_2^i = z_2^i \in Z_2^i(\Omega)$  についての平均値

$$H(Z_{i+1}|Z_2^i) - H(Z_{i+1}|Z_1^i) \geq 0$$

$$H(Z_i|Z_1^{i-1}) \geq H(Z_{i+1}|Z_1^i) \geq 0$$

$$a_n \rightarrow a \implies \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \rightarrow a$$

$$\frac{H(Z^n)}{n} = \frac{H(Z_1) + H(Z_2|Z_1) + \cdots + H(Z_n|Z_1^{n-1})}{n} \rightarrow H$$

## Markov 過程

$\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$  が  $h$  次 Markov 過程

$i \geq h + 1$  で

$$P_{Z_i|Z_1^{i-1}}(z_i|z_1^{i-1}) = P_{Z_i|Z_{i-h}^{i-1}}(z_i|z_{i-h}^{i-1}) \quad (24)$$

有限の  $h \geq 0$  が存在

$h = 0$  であれば,  $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$  は独立

$P_{Z_i|Z_{i-h}^{i-1}}(z_i|z_{i-h}^{i-1})$  の  $z_{i-h}^{i-1} \in Z^h(\Omega)$  の分割

$s^{(1)}, \dots, s^{(k)} \subseteq Z^h(\Omega)$ :

$$s^{(i)} \cap s^{(j)} = \{\}, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^k s^{(i)} = Z^h(\Omega)$$

## Markov 過程 (続)

$$\mathcal{S} := \{s^{(1)}, \dots, s^{(k)}\}$$
$$s : z^h \in Z^h(\Omega) \rightarrow s(z^h) \in \mathcal{S}$$

$$P_{Z_i|Z_{i-1}}(z_i|z^{i-1}) = P_{Z_i|s(Z_{i-h}^{i-1})}(z_i|s(z_{i-h}^{i-1})), \quad z_{i-h}^{i-1} \in Z_{i-h}^i(\Omega) \quad (25)$$

- ▶  $s(z_{i-h}^{i-1})$  が同じであれば,  $Z_i = z_i \in Z_i(\Omega)$  の確率が同じ
- ▶ 定常性より、  
 $P_{S_i}(s_i), s_i := s(z_{i-h}^{i-1}) \in \mathcal{S}, S_i := s(Z_{i-h}^{i-1}): i$  によらない

### エントロピー

$$H(Z_i|Z_{i-h}^{i-1}) = H(Z_i|S_i) = \sum_{s \in \mathcal{S}} P_{S_i}(s) H(Z_i|S_i = s): i \text{ によらない}$$

## Markov 過程で $\theta$ が既知の場合

$z_{-h+1}^0 = z_{-h+1} \cdots z_0 \in Z^h(\Omega)$ : 未知 ( $h$  は有限)

全体  $z^n$  として、 $O(1/n)$  の平均圧縮率増加

$c_{z,s}$ :  $s \in \mathcal{S}$  における  $z \in Z(\Omega)$  の頻度

$\theta_{z,s}$ :  $s \in \mathcal{S}$  における  $z \in Z(\Omega)$  の確率:

$$\theta_{z,s} \in \left\{ (\theta_{z,s})_{z \in Z(\Omega), s \in \mathcal{S}} \mid \theta_{z,s} \geq 0, z \in Z(\Omega), \sum_{z \in Z(\Omega)} \theta_{z,s} = 1, s \in \mathcal{S} \right\}$$

$$P_\theta(z^n) := \prod_{s \in \mathcal{S}} \prod_{z \in Z(\Omega)} \theta_{z,s}^{c_{z,s}}$$

$\theta_{z,s}$  が既知

平均圧縮率とエントロピーの差を  $O(1/n)$  にする符号化が存在

## Markov 過程で $\theta$ が未知の場合

$$Q^{(S)}(z^n) := \prod_{s \in \mathcal{S}} \frac{\Gamma(m/2) \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(c_{j,s} + 1/2)}{\Gamma(1/2)^m \Gamma(n_s + m/2)}$$

$$n_s := \sum_{z \in Z(\Omega)} c_{z,s}$$

$$\begin{aligned} l^{(S)}(z^n) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \left[ \mathcal{H}_s(z^n) + \frac{m-1}{2} \log n_s + O(1) \right] \\ &\leq \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{H}_s(z^n) + \frac{|\mathcal{S}|(m-1)}{2} \log n + O(1) \quad (26) \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_s(z^n) := \sum_{z \in Z(\Omega)} c_{z,s} \log \frac{n_s}{c_{z,s}}$$

(22) に相当する確率の推定式:

$$\frac{c_{z,s} + 1/2}{n_s + m/2} \quad (27)$$

## $S$ が未知の場合: 2 段階符号化

$S$  の候補は有限個なので, 各  $S$  の事前確率  $\pi(S)$  を決められる

### 2 段階符号化

$\lceil -\log \pi(S) \rceil$  の長さで  $S$  を符号化し, その  $S$  を送受信側が共有した後, 長さ  $l^{(S)}(z^n)$  で  $z^n \in Z(\Omega)^n$  を送信

$$l(z^n) := \min_S \{ \lceil -\log \pi(S) \rceil + \lceil l^{(S)}(z^n) \rceil \}$$

$S$  に重み付けして、適応的符号化で実現

$$Q(z^n) := \sum_S \pi(S) Q^{(S)}(z^n)$$

$$l(z^n) := \lceil -\log Q(z^n) \rceil$$

## MDL 基準

後者の符号長が前者の符号長を上回ることはない:

$$\begin{aligned} -\log Q(z^n) &= -\log \sum_S \pi(S) Q^{(S)}(z^n) \\ &\leq -\log \max_S \pi(S) Q^{(S)}(z^n) \\ &\leq \min_S [-\log \pi(S) - \log Q^{(S)}(z^n)] \\ &\leq \min_S \{ \lceil -\log \pi(S) \rceil + l^{(S)}(z^n) \}. \end{aligned}$$

メリットは無いが、 $z^n \in Z^n(\Omega)$  から  $S$  を推定する手段として利用

$$\frac{\pi(S) Q^{(S)}(z^n)}{\sum_{S'} \pi(S') Q^{(S')}(z^n)}$$

(分子) を最大にする  $S$  を求めること (誤り確率最小) と等価