鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
3. 統計的学習
3.1 大数の法則と中心極限定理

鈴木讓

大阪大学

2009 年 11 月 19 日

あらまし

大数の法則

中心極限定理

Borel-Cantelli の補題

$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$

命題 3.1(Borel-Cantelli の補題)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ が収束
$\displaystyle\Longrightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ ($\{A_n\}$ 無限回の確率が 0)
2. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ が発散
$\displaystyle\Longrightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ ($\{A_n\}$ 無限回の確率が 1)

第 1 の Borel-Cantelli の補題の証明

各 $m = 1, 2, \cdots$ で

$$\mu\left(\bigcup_{k=m}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{n} \mu(A_k)$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$$

$m \to \infty$ で

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) \to 0.$$

第 2 の Borel-Cantelli の補題の証明

$$1 - x \leq e^{-x}, \ \ x \in \mathbb{R}$$

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立なので、各 $n = 1, 2, \cdots$ と $m \to \infty$ で

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} \overline{A_k}\right) &= \prod_{k=n}^{n+m} (1 - \mu(A_k)) \\
&\leq \prod_{k=n}^{n+m} \exp[-\mu(A_k)] = \exp\left[-\sum_{k=n}^{n+m} \mu(A_k)\right] \to 0
\end{aligned}$$

各 $n = 1, 2, \cdots$ で、$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} \overline{A_k}\right) = 0$

$$\mu(\overline{\limsup_{n\to\infty} A_n}) = \mu\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = 0$$

Markov の不等式

$\alpha > 0$
$k \geq 1$

補題 3.1 (Markov の不等式)

$$\mu(|X| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^k} E[|X|^k]$$

証明:

$$\begin{aligned} E[|X|^k] &= \int_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \mu_X(dx) \geq \int_{|x| \geq \alpha} |x|^k \mu_X(dx) \\ &\geq \alpha^k \int_{|x| \geq \alpha} \mu_X(dx) \end{aligned}$$

大数の強法則

$\{X_i\}_{i=1}^n$: 独立で同一の分布に従う確率変数 ($E[X_i] = 0$)

定理 3.1 (大数の強法則)

$E[X_i^2] < \infty,\ E[X_i^4] < \infty$ のとき,

$$\mu\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = 0\right\} = 1$$

大数の強法則の証明

$\sigma^2 := E[X_n^2]$, $\xi^4 := E[X_n^4]$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $K > 0$
i, j, k, l の 2 つが同じ s, 他の 2 つが同じ $t \neq s$ のとき,

$$E[X_s^2 X_t^2] = E[X_s^2]E[X_t^2] = \sigma^4$$

i, j, k, l がすべて異なるとき,

$$E[X_i X_j^3] = E[X_i X_j X_k^2] = E[X_i X_j X_k X_l] = 0$$

$$E[S_n^4] = \sum_{1 \leq i,j,k,l \leq n} E[X_i X_j X_k X_l] = n\xi^4 + 3n(n-1)\sigma^4 \leq Kn^2$$

Markov の不等式に $X = S_n$, $k = 4$, $\alpha = n\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ を適用:

$$\mu(|S_n| \geq n\epsilon) \leq \frac{1}{(n\epsilon)^4} Kn^2 = K\epsilon^{-4} n^{-2}$$

大数の強法則の証明 (続)

$$A_\epsilon := \limsup_{n\to\infty}\{\omega\in\Omega \mid |n^{-1}S_n(\omega)| > \epsilon\}$$

第 1 の Borel-Cantelli, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} K\xi^{-4}n^{-2} < \infty$ より, $\mu(A_\epsilon) = 0$

$$\Omega - \left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n} = 0\right\} = \bigcup_{\epsilon\in\mathbb{Q}_{>0}} A_\epsilon$$

右辺は事象 A_ϵ を可算個加えているので事象 (左辺も事象)

$$\mu(\bigcup_{\epsilon\in\mathbb{Q}_{>0}} A_\epsilon) \le \sum_{\epsilon\in\mathbb{Q}_{>0}} \mu(A_\epsilon) = 0$$

確率収束と概収束

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \to X$

確率収束　任意の $\epsilon > 0$ について,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} = 0$$

概収束

$$\mu\left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1$$

確率収束 $\not\Longrightarrow$ 概収束

例: $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$: 独立な事象の列

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty},\ X_n = I_{A_n}\ ,\ \mu(A_n) = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$$

($X_n \to 0$ に確率収束)

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \to \infty$$

($n \to \infty$) と第 2 の Borel-Cantelli から

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$$

($X_n \to 0$ に概収束しない)

確率収束 $\Longleftarrow$ 概収束

命題 3.2

確率収束 $\Longleftarrow$ 概収束

証明: $k = 1, 2, \cdots$

$$A_{k,n} := \{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{k}\}$$

$$A_k := \limsup_{n\to\infty} A_{k,n}$$

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$$

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \to X(\text{概収束}) \Longleftrightarrow 0 = \mu(A) \geq \mu(A_k),\ k = 1, 2, \cdots$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_{k,n}) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_{k,n}) \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} A_{k,n}) = \mu(A_k) = 0$$

任意の $\epsilon > 0$ で

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon) = 0$$

大数の弱法則

$\{X_i\}_{i=1}^n$: 独立で同一の分布に従う確率変数 ($E[X_i] = 0$)

大数の弱法則

任意の $\epsilon > 0$ について,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{\omega \in \Omega \mid \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(\omega)\right| > \epsilon\right\} = 0. \tag{1}$$

例: $X_n := I_{A_n} - p,\ \mu(A_n) = p > 0$ (独立) のとき、$E[X_n] = 0$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to 0$$

Chebyshev の不等式

補題 3.2(Chebyshev の不等式)

平均 0，分散が有限の確率変数 X と $\epsilon > 0$ について，

$$\mu(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} V[X]$$

証明: Markov の不等式で，X を $X - E[X]$ とし，$k := 2$

大数の弱法則の別証明: Chebyshev の不等式で，$X := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} V[X_i]}{n^2\epsilon^2} = \frac{V[X_n]}{n\epsilon^2} \to 0$$

中心極限定理

X: 確率変数
$\{X_n\}$: 確率変数の列

$\{X_n\}$ が X に法則収束

X の分布関数 F_X の不連続点以外で，$F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ $(n \to \infty)$

$\{X_n\}$: 独立で同一分布 $(E[X_n] = \mu,\ \ V[X_n] = \sigma^2)$

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

中心極限定理

$\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ は標準正規分布に法則収束

例: $Y_n := X_n + p$, $\mu(Y_n = 1) = p$, $\mu(Y_n = 0) = 1 - p$,
$\mu = p$, $\sigma^2 = p(1-p)$, $S_n := \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $Y \sim N(0,1)$
$(S_n - np)/\sqrt{np(1-p)} \to Y$ (法則収束)

確率収束と法則収束

命題 3.3

確率収束 $\Longrightarrow$ 法則収束

証明: $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \to X$(確率収束) のとき，任意の $\epsilon > 0$ で

$$
\begin{aligned}
F_{X_n}(x) &:= \mu(X_n \le x) \\
&= \mu(X_n \le x, X \le x + \epsilon) + \mu(X_n \le x, X > x + \epsilon) \\
&\le \mu(X \le x + \epsilon) + \mu(|X_n - X| > \epsilon),
\end{aligned}
$$

x を $x - \epsilon$ に置き換え，X_n と X を交換すると，

$$\mu(X \le x - \epsilon) \le \mu(X_n \le x) + \mu(|X_n - X| > \epsilon)$$

となるので，$\mu(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$ より，

$$\mu(X \le x - \epsilon) \le \lim_{n\to\infty} \mu(X_n \le x) \le \mu(X \le x + \epsilon).$$

$F_X(x) = \mu(X \le x)$ の各連続点で，$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$