鈴木譲「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
2. グラフィカルモデル
2.5 Bayesian ネットワーク: 依存モデルの有向非巡回グラフによる表現

鈴木譲

大阪大学

2009 年 11 月 12 日

あらまし

1. Bayesian ネットワーク
2. 依存モデル M が DAG 同型

Bayesian ネットワーク

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$: DAG
M: 依存モデル

頂点集合 $\mathbf{U}$ = 確率変数の集合 $\mathbf{U}$

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$ が M の I-対応

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{U}$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_D \Longrightarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})_M$$

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$ が M の D-対応

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{U}$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_D \Longleftarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})_M$$

Bayesian ネットワーク (続)

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$ が M の完全対応

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{U}$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G \Longleftrightarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})_M$$

M は DAG 同型 (DAG と同型、因果的)

D が M の極小 I-対応 (D が M の Bayesian ネットワーク)

1. $D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$ が M の I-対応
2. 任意の $\vec{\mathbf{E}}' \subsetneq \vec{\mathbf{E}}$ に対して，$D' = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}}')$ が M の I-対応ではない

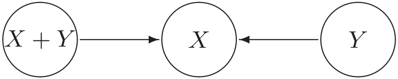
Bayesian ネットワーク (続)

例: 3 通りの Bayesian ネットワーク。I 対応だが、D 対応ではない

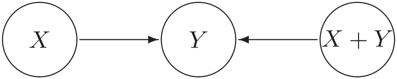
1. $I(\{X+Y\},\{X\},\{Y\})_M$, $I(\{X\},\{Y\},\{X+Y\})_M$, $I(\{Y\},\{X+Y\},\{X\})_M$: 不成立
2. $\langle\{X+Y\}|\{X\}|\{Y\}\rangle_D$, $\langle\{X\}|\{Y\}|\{X+Y\}\rangle_D$, $\langle\{Y\}|\{X+Y\}|\{X\}\rangle_D$: 不成立

1. $I(\{X+Y\},\{\},\{Y\})_M$, $I(\{X\},\{\},\{X+Y\})_M$, $I(\{Y\},\{\},\{X\})_M$: 成立
2. $\langle\{X+Y\}|\{\}|\{Y\}\rangle_D$, $\langle\{X\}|\{\}|\{X+Y\}\rangle_D$, $\langle\{Y\}|\{\}|\{X\}\rangle_D$: 1 個だけ成立 (2 個以上成立しない)

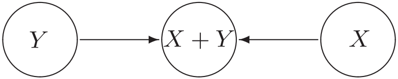
(a)



(b)



(c)



境界有向非巡回グラフ

d: $\mathbf{U} := \{U_1, \cdots, U_n\}$ の要素 (確率変数) 間の順序 (任意に固定)
$\mathbf{U}_i := \{U_1, \cdots, U_i\}$
$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$

D が順序 d のもとでの M の境界有向非巡回グラフ

$$I(\{U_i\}, \mathbf{Z}, \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{Z})_M, \quad U_i \notin \mathbf{Z}$$

任意の $\mathbf{Z}' \subsetneq \mathbf{Z}$ について

$$I(\{U_i\}, \mathbf{Z}', \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{Z}' - \{U_i\})_M, \quad U_i \notin \mathbf{Z}'$$

が成立しないようにさだめた $\vec{\mathbf{E}} = \bigcup_{i=1}^n \{(U, U_i) \mid U \in \mathbf{B}_i\}$

定理 2.10

M: (5)–(8) を満足する依存モデル

定理 2.10

D が M の境界有向非巡回グラフであれば、Bayesian ネットワーク

系 2.4

$\mu_{\mathbf{U}}$: $\mathbf{U}$ に関する確率
d: $\mathbf{U}$ の順序 (固定)

系 2.4

1. $\mathbf{U}$ の要素の順序 d が与えられたもとで,

$$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}}) \ , \ \vec{\mathbf{E}} = \{(U, U_i) \,|\, U \in \boldsymbol{\pi}(U_i), \ i = 1, \cdots, n\}$$

$$\mu_{U_i|\boldsymbol{\pi}(U_i)} = \mu_{U_i|U_1,\cdots,U_{i-1}}, \quad \boldsymbol{\pi}(U_i) \subseteq \{U_1, \cdots, U_{i-1}\}$$

$$\mu_{U_i|\mathbf{Z}} \neq \mu_{U_i|U_1,\cdots,U_{i-1}}, \quad \mathbf{Z} \subseteq \boldsymbol{\pi}(U_i), \quad \mathbf{Z} \neq \boldsymbol{\pi}(U_i)$$

とかければ、D は μ の Bayesian ネットワーク

2. $\mu_{\mathbf{U}}(d\mathbf{u}) > 0, \ \mathbf{u} \in \mathbf{U}(\Omega)$ のとき，$\{\boldsymbol{\pi}(U_i)\}_{i=1}^n$ は一意
(Bayesian ネットワークは d のもとで一意)

系 2.5

系 2.5

系 2.4 で Bayesian ネットワークが得られた際の順序 d は、
$\vec{\mathbf{E}}$ の方向を変えない範囲で別の順序に変えることができる。

系 2.6

$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$: M の Bayesian ネットワーク

系

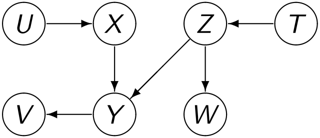
$$B(X) := \pi(X) \cup \{Y \in \mathbf{U} \mid (X, Y) \in \vec{\mathbf{E}}\} \cup \{Z \in \pi(Y) \mid (X, Y) \in \vec{\mathbf{E}}\}$$

以外の頂点は、$X \in \mathbf{U}$ の Markov 境界 $B_M(X)$ に含まれない。

証明: D は Bayesian ネットワークであり、I 対応。

$$< \{X\}|B(X)|\mathbf{U} - \{X\} - B(X) >_D \Longrightarrow I(\{X\}, B(X), \mathbf{U} - \{X\} - B(X))_M$$

より、$< \{X\}|B(X)|\mathbf{U} - B(X) - \{X\} >_G$ をいえば十分



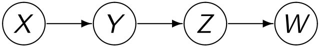
順序を変えると、構造が変わる

$$\Sigma = \{I(\{X\},\{Y\},\{Z\}), I(\{X\},\{Z\},\{W\}), I(\{Y\},\{Z\},\{W\})$$
$$I(\{X,Y\},\{Z\},\{W\}), I(\{X\},\{Y,Z\},\{W\}), I(\{Y\},\{X,Z\},\{W\})\}$$

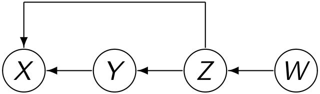
M: Σ の要素に (5), (12) を適用した $\mathbf{U}=\{X,Y,Z,W\}$ の依存モデル

$$I(\{X\},\{Y\},\{Z\})_M, I(\{X\},\{Y,Z\},\{W\})_M, \neg I(\{X\},\{Y\},\{Z,W\})$$

(a)



(b)



定理 2.11

定理 2.11

依存モデル M が DAG 同型であるためには，(5)-(9) 以外に，以下が必要

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}\cup\mathbf{W}) \Longleftarrow I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y})\wedge I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{W}), \tag{46}$$

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y})\wedge I(\mathbf{X},\mathbf{Z}\cup\{W\},\mathbf{Y}) \Longrightarrow I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\{W\})\vee I(\{W\},\mathbf{Z},\mathbf{Y}), \tag{47}$$

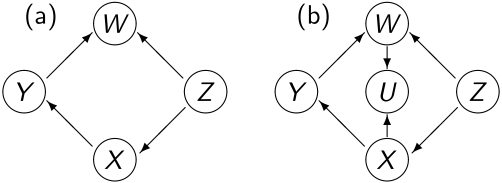
$$\begin{aligned} & I(\{X\},\{Z,W\},\{Y\})\wedge I(\{Z\},\{X,Y\},\{W\}) \\ & \Longrightarrow I(\{X\},\{Z\},\{Y\})\vee I(\{X\},\{W\},\{Y\}). \end{aligned} \tag{48}$$

証明: DAG の公理で成立しているものは，依存モデルの公理でも成立。
命題 2.9 の $\langle\cdot|\cdot|\cdot\rangle_D$ で成立するものは、$I(\cdot,\cdot,\cdot)$ でも成立。

定理 2.11 は、必要条件にすぎない

例: $\mathbf{U} = \{X, Y, Z, W\}$ で,
$I(\{X\}, \{Y, Z\}, \{W\})_M, I(\{Y\}, \{X\}, \{Z\})_M$ が真
$I(\{X\}, \{Y\}, \{W\})_M, I(\{X\}, \{Z\}, \{W\})_M, I(\{Y\}, \{X, W\}, \{Z\})_M$ が偽
定理 2.11 の条件を満足する依存モデル M が存在 ((a) は完全対応)

$\mathbf{U} = \{X, Y, Z, W\}$ の依存モデルの真偽は変えずに、
$I(\{Y, Z\}, \{W\}, \{U\})_M$ が真で $I(\{X\}, \{Y, Z, U\}, \{W\})_M$ が偽
となる確率変数 U を $\mathbf{U}$ に加えても，定理 2.11 の条件は維持できる。
$\langle\{Y, Z\}|\{W\}|\{U\}\rangle_D$ が成立しない ((b) など)。



定理 2.12

依存モデル M が無向グラフ G とグラフ同型のとき、
有向非巡回グラフとグラフ同型 $\Longleftrightarrow$ G が chordal

証明: G は無向グラフ同型より、

G が chordal でない
$\Longrightarrow$ G は (21) を満足せず (命題 2.4)
$\Longrightarrow$ M は (48) を満足せず (定理 2.11)
$\Longrightarrow$ D は DAG 同型ではない

G が chordal
$\Longrightarrow$ G は再帰的単純 (定理 2.2)
$\Longrightarrow$ 単純な頂点に隣接の頂点から有向辺をひくと DAG D
($X \to Z \leftarrow Y$ の X, Y が隣接)
$\Longrightarrow$ G でいえる M の真偽と、D でいえる M の真偽が一致
$\Longrightarrow$ D は DAG 同型

系 2.7

系 2.7

依存モデル M が無向グラフおよび有向非巡回グラフの両方とグラフ同型 $\iff$ M が (5), (6), (9), (30), (31), (48) を満足。

証明:
定理 2.6 より、 M が無向グラフ同型 $\Longrightarrow$ (5), (6), (9), (30), (31)
定理 2.11 より、M がさらに DAG 同型 $\Longrightarrow$ (48)
定理 2.6 より、 (5), (6), (9), (30), (31) $\Longrightarrow$ M が無向グラフ同型
命題 2.4 より、さらに (48) $\Longrightarrow$ (21) $\Longrightarrow$ G は chordal
定理 2.12 より、M が無向グラフ同型で chordal $\Longrightarrow$ M は DAG 同型

DAG 同型の必要十分条件を依存モデルの公理であらわす

必要　定理 2.11: (5)-(9), (46), (47), (48)

十分　定理 2.6: (5), (6), (9), (30), (31), 定理 2.12: (48)

必要十分は未解決

モラル化

モラル化: 有向辺の向きを取っただけでは、I対応の無向グラフが得られない

$$X \to Z \leftarrow Y \Longrightarrow \mathbf{E} := \mathbf{E} \cup \{\{X, Z\}, \{Y, Z\}, \{X, Y\}\}$$

$$\neg X \to Z \leftarrow Y \Longrightarrow \mathbf{E} := \mathbf{E} \cup \{\{X, Z\}, \{Y, Z\}\}$$

例: