鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
2. グラフィカルモデル
2.4 有向グラフ

鈴木讓

大阪大学

2009 年 11 月 12 日

あらまし

1. DAG
2. DAG における d 分離性

有向グラフ

$\mathbf{U}$: 有限集合
$\vec{\mathbf{E}} \subseteq \vec{\mathcal{E}} := \{(X, Y) \mid X, Y \in \mathbf{U}, X \neq Y\}$

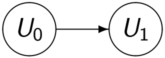
有向グラフ $\vec{G} := (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$

頂点集合 $\mathbf{U} \ni$ 頂点
(有向) 辺集合 $\vec{\mathbf{E}} \ni$ (有向) 辺

無向経路と有向経路

$U_0, U_1(\in \mathbf{U})$ が隣接

$(U_0, U_1) \in \vec{G}$ または $(U_1, U_0) \in \vec{G}$



$\{U_i\}_{i=0}^{k}$ が頂点 U_0, U_k を結ぶ長さ $k = 0, 1, 2, \cdots$ の経路

無向経路 $(U_{i-1}, U_i) \in \vec{\mathbf{E}}$ または $(U_i, U_{i-1}) \in \vec{\mathbf{E}}$,

有向経路 $(U_{i-1}, U_i) \in \vec{\mathbf{E}}$

$i = 1, \cdots, k$

経路 $\{U_i\}_{i=0}^{k}$ が巡回経路

無向巡回経路 無向経路について $(k = 3, 4, \cdots)$

有向巡回経路 有向経路について $(k = 2, 3, \cdots)$

$$U_0 = U_k,\ U_j \neq U_i,\ \ j = 0, \cdots, i-1;\ i = 1, \cdots, k-1$$

子孫、先祖、子、親

Y が X の子孫、X が Y の先祖

$X \in \mathbf{U}$ から $Y \in \mathbf{U}$, $Y \neq X$ への長さ 1 以上の有向経路が存在

$D(X)$: X の子孫の集合

$A(Y)$: Y の先祖の集合

Y は X の子、X が Y の親

$(X, Y) \in \vec{\mathbf{E}}$

$C(X)$: X の子の集合

$P(Y)$: Y の親の集合

有向非巡回グラフ DAG

$\vec{G} = (\mathbf{V}, \vec{\mathbf{E}})$ が、有向非巡回グラフ (Directed Acyclic Graph)

有向グラフが有向巡回経路を含まない

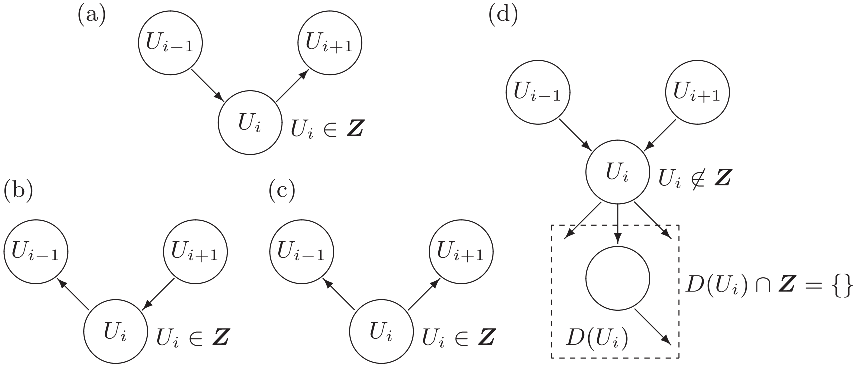
一般の有向グラフではなく，有向非巡回グラフを仮定

$\vec{G} = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$ ではなく，$D = (\mathbf{U}, \vec{\mathbf{E}})$ とかく

DAG における d 分離性

Z は、$\{U_i\}_{i=0}^k$ を d-分離

無向経路 $\{U_i\}_{i=0}^k$, $X = U_0$, $Y = U_k$, $U_1, \cdots, U_{k-1}$ が $k \geq 2$ で、
以下のいずれかを含む



DAG における d 分離性 (続)

$\mathbf{Z}$ は X, Y を d-分離

$\mathbf{Z}$ が、$X, Y \in \mathbf{U}$ を結ぶ任意の無向経路を d-分離

X, Y を結ぶ無向経路が存在しない: $\mathbf{Z}$ は X, Y を d-分離
$X = Y$ または $(X, Y) \in \vec{\mathbf{E}}$ または $(Y, X) \in \vec{\mathbf{E}}$: $\mathbf{Z}$ は X, Y を d-分離しない

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{U}$

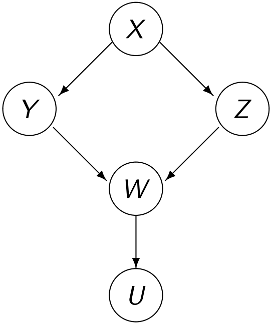
$\mathbf{Z}$ は $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ を d-分離 $\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_D$

各 $X \in \mathbf{X}$, $Y \in \mathbf{Y}$ について, $X, Y \in \mathbf{U}$ を $\mathbf{Z}$ が d-分離

DAG における d 分離性 (続)

例:

1. $\langle \{Y\} | \{X\} | \{Z\} \rangle_D$ は真
   $Y \leftarrow X \rightarrow Z,\ X \in \{X\},$
   $Y \rightarrow W \leftarrow Z,\ W \notin \{X\}, D(W) \cap \{X\} = \{U\} \cap \{X\} = \{\}$
2. $\langle \{Y\} | \{X, U\} | \{Z\} \rangle_D$ は偽
   $Y \rightarrow W \leftarrow Z,\ W \notin \{X, U\},\ U \in D(W) \cap \{X, U\}$



命題 2.7、命題 2.8

命題 2.7

$\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\}$ のとき，$\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y} \rangle_D$ は偽である。

証明: $\mathbf{Z}$ は、$X = Y \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ を d-分離しない。

命題 2.8

$$\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y} \rangle_D \iff \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z} - \mathbf{X} - \mathbf{Y}|\mathbf{Y} \rangle_D \tag{38}$$

証明: $X = Z \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Z}$ は、どんな $X \in \mathbf{X}$，$Y \in \mathbf{Y}$ も d-分離しない。
同じことが $Y = Z \in \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}$ についても成立。

命題 2.9

命題 2.9

$$\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\rangle_D \iff \langle \mathbf{Y}|\mathbf{Z}|\mathbf{X}\rangle_D \tag{39}$$

$$\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\cup\mathbf{W}\rangle_D \iff \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\rangle_D \wedge \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{W}\rangle_D \tag{40}$$

$$\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}\cup\mathbf{W}|\mathbf{Y}\rangle_D \wedge \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}\cup\mathbf{Y}|\mathbf{W}\rangle_D \Longrightarrow \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\cup\mathbf{W}\rangle_D \tag{41}$$

$$\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\cup\mathbf{W}\rangle_D \Longrightarrow \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}\cup\mathbf{W}|\mathbf{Y}\rangle_D \tag{42}$$

$$\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}\cup\mathbf{Y}|\mathbf{W}\rangle_D \wedge \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\rangle_D \Longrightarrow \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\cup\mathbf{W}\rangle_D \tag{43}$$

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\rangle_D \wedge \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}\cup\{W\}|\mathbf{Y}\rangle_D \\ &\Longrightarrow \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\{W\}\rangle_D \vee \langle \{W\}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\rangle_D\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}&\langle \{X\}|\{Z,W\}|\{Y\}\rangle_D \wedge \langle \{Z\}|\{X,Y\}|\{W\}\rangle_D \\ &\Longrightarrow \langle \{X\}|\{Z\}|\{Y\}\rangle_D \vee \langle \{X\}|\{W\}|\{Y\}\rangle_D, \quad X,Y,Z,W\in\mathbf{U}\end{aligned} \tag{45}$$

証明: テキスト (81-83 ページ)

d-分離性と分離性

- $\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\rangle_G \Rightarrow \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}\cup\mathbf{W}|\mathbf{Y}\rangle_G$
- $\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y}\rangle_D \not\Rightarrow \langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}\cup\mathbf{W}|\mathbf{Y}\rangle_D$

例: $\mathbf{U}=\{X,Y,Z\}$, $\vec{\mathbf{E}}=\{(X,Z),(Y,Z)\}$, $\mathbf{X}=\{X\}$, $\mathbf{Y}=\{Y\}$, $\mathbf{Z}=\{\}$, $\mathbf{W}=\{Z\}$