

鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)  
2. グラフィカルモデル  
2.2 無向グラフ

鈴木讓

大阪大学

2009年10月29日

# あらまし

- 1 分離性
- 2 Chordal 性と同値な条件
- 3 重み最大極大木アルゴリズム

**U**: 有限集合

$E \subseteq \mathcal{E} := \{\{X, Y\} \mid X, Y \in \mathbf{U}, X \neq Y\}$

無向グラフ  $G = (\mathbf{U}, E)$

**U** :  $G$  の頂点集合 (要素: 頂点)

**E** :  $G$  の辺集合 (要素: 辺)

2 頂点  $X, Y (\in \mathbf{U})$  が隣接

$\{X, Y\} \in E$

$\{U_i\}_{i=0}^k$  が  $U_0, U_k (\in \mathbf{U})$  を結ぶ (長さ  $k = 0, 1, 2, \dots$  の) 経路

$U_1, \dots, U_{k-1} \in \mathbf{U}$  が存在して、 $\{U_{i-1}, U_i\} \in E, i = 1, \dots, k$

## 分離性

$Z(\subseteq U)$  が経路  $\{U_i\}_{i=0}^k$  を分離

- ①  $k \geq 2$
- ②  $U_i \in Z$  なる  $1 \leq i \leq k-1$  が存在

$Z(\subseteq U)$  が  $X, Y (\in U)$  を分離

$Z$  が  $X, Y$  を結ぶ任意の経路 (一般に複数) を分離

- $X, Y$  を結ぶ経路が存在しない  $\implies Z$  は  $X, Y$  を分離
- $X = Y$  ( $k = 0$ ) または  $\{X, Y\} \in E$  ( $k = 1$ )  $\implies Z$  は  $X, Y$  を分離しない

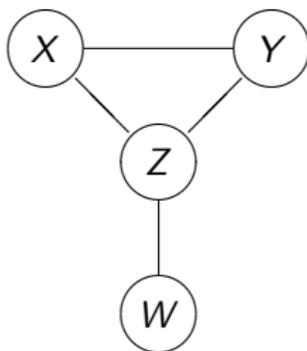
$Z(\subseteq U)$  が  $X, Y(\subseteq U)$  を分離  $\langle X|Z|Y \rangle_G$

各  $X \in X, Y \in Y$  について,  $Z$  が  $X, Y$  を分離

## 分離性 (続)

真:  $\langle \{X\} | \{Z\} | \{W\} \rangle_G, \langle \{Y\} | \{Z\} | \{W\} \rangle_G$

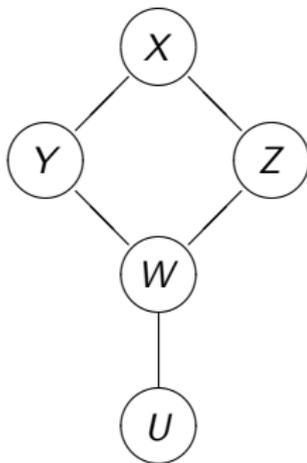
偽:  $\langle \{Y\} | \{X\} | \{W\} \rangle_G, \langle \{X\} | \{Y\} | \{Z\} \rangle_G$



## 分離性 (続)

真:  $\langle \{X\} | \{Y, Z\} | \{W\} \rangle_G$ ,  $\langle \{X\} | \{Y, Z\} | \{U\} \rangle_G$ ,  $\langle \{Y\} | \{X, W\} | \{Z\} \rangle_G$

偽:  $\langle \{X\} | \{Y\} | \{W\} \rangle_G$ ,  $\langle \{X\} | \{Z\} | \{U\} \rangle_G$ ,  $\langle \{Y\} | \{X\} | \{Z\} \rangle_G$



## 分離性の性質

### 命題 2.1

$\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\}$  のとき  $\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G$  は偽である。

証明:  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$  の要素は  $\mathbf{Z}$  で分離されないので、 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  は  $\mathbf{Z}$  で分離されない。

### 命題 2.2

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G \iff \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} - \mathbf{X} - \mathbf{Y} | \mathbf{Y} \rangle_G \quad (13)$$

証明:  $\mathbf{X} \cap \mathbf{Z}$  の要素は, どのような  $X \in \mathbf{X}, Y \in \mathbf{Y}$  も分離されない。  
 $\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}$  の要素も同様。

## 分離性の性質 (続)

### 命題 2.3

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G \iff \langle \mathbf{Y} | \mathbf{Z} | \mathbf{X} \rangle_G \quad (14)$$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \cup \mathbf{W} \rangle_G \iff \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G \wedge \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{W} \rangle_G \quad (15)$$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} \cup \mathbf{W} | \mathbf{Y} \rangle_G \wedge \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y} | \mathbf{W} \rangle_G \implies \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \cup \mathbf{W} \rangle_G \quad (16)$$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G \implies \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} \cup \mathbf{W} | \mathbf{Y} \rangle_G \quad (17)$$

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G \implies \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \{U\} \rangle_G \vee \langle \{U\} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G, U \notin \mathbf{Z} \quad (18)$$

証明: テキスト参照 (47-48 ページ)

(15)(17) より、

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \cup \mathbf{W} \rangle_G \implies \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} \cup \mathbf{W} | \mathbf{Y} \rangle_G \wedge \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y} | \mathbf{W} \rangle_G \quad (19)$$

(17)(18) より、 $U \notin \mathbf{Z}$  について

$$\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G \implies \langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y} | \{U\} \rangle_G \vee \langle \{U\} | \mathbf{Z} \cup \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle_G \quad (20)$$

## 巡回経路

### $G$ が連結

任意の異なる 2 頂点に経路が存在

### $G$ が完全

任意の異なる 2 頂点が隣接

$U = \{ \} \implies G = (U, E)$  は完全

経路  $\{U_i\}_{i=0}^k$  が (長さ  $k = 3, 4, \dots$  の) 巡回経路

$$U_0 = U_k, U_j \neq U_i, j = 0, \dots, i-1; i = 1, \dots, k-1$$

### $G$ が森

$G$  に巡回経路が存在しない

### $G$ が木

$G$  が連結かつ森

## Chordal

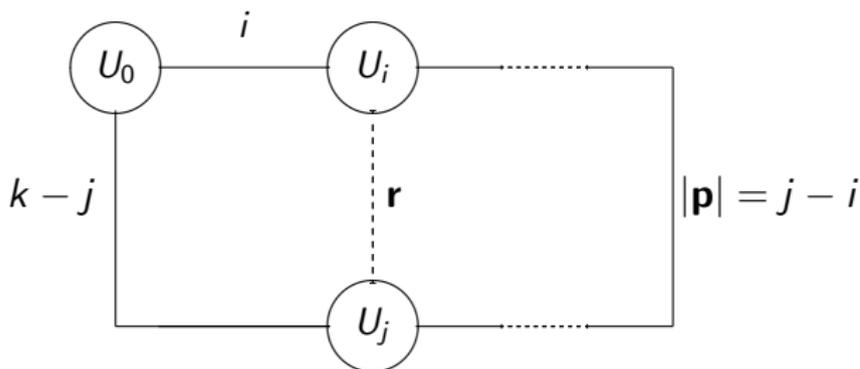
巡回経路  $\{U_i\}_{i=0}^k$  が、 $i < j$  として、

- 長さ  $|\mathbf{p}| := j - i$  の経路  $\mathbf{p} := U_i \cdots U_j$
- 長さ  $|\mathbf{q}| := k - j + i$  の経路  $\mathbf{q} := U_j \cdots U_i$
- $U_i$  と  $U_j$  を結ぶ長さが  $\max\{|\mathbf{p}|, |\mathbf{q}|\}$  より小さい経路  $\mathbf{r} \neq \mathbf{p}, \mathbf{q}$

$\mathbf{p}$  または  $\mathbf{q}$  を  $\mathbf{r}$  に置き換えて、長さが  $k = |\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$  より小さい巡回経路

### 極小巡回経路

それ以上長さを短くすることができない巡回経路

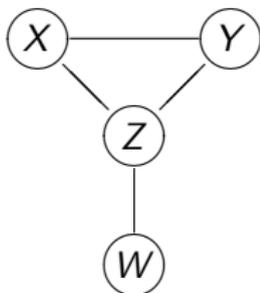


## Chordal (続)

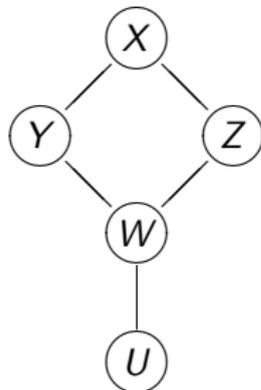
### $G$ が chordal

長さ 4 以上の極小巡回経路が存在しない

- $G$  が完全  $\implies G$  が chordal である。



Chordal



Chordal ではない

## Chordal (続)

### 命題 2.4

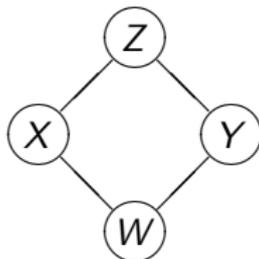
異なる  $X, Y, Z, W \in U$  について、以下がいえれば  $G$  は chordal

$$\begin{aligned} & \langle \{X\} | \{Z, W\} | \{Y\} \rangle_G \wedge \langle \{Z\} | \{X, Y\} | \{W\} \rangle_G \\ & \implies \langle \{X\} | \{Z\} | \{Y\} \rangle_G \vee \langle \{X\} | \{W\} | \{Y\} \rangle_G \end{aligned} \quad (21)$$

証明：  $\{X, Y\} \notin E$  かつ  $\{Z, W\} \notin E$  であれば、

- $\langle \{X\} | \{Z, W\} | \{Y\} \rangle_G$ ,  $\langle \{Z\} | \{X, Y\} | \{W\} \rangle_G$  は真
- $\langle \{X\} | \{Z\} | \{Y\} \rangle_G$ ,  $\langle \{X\} | \{W\} | \{Y\} \rangle_G$  は偽

(長さ 5 以上の巡回経路でも同様に成立)



## 分解可能

$$G = (\mathbf{U}, \mathbf{E})$$

$$\mathbf{U}' \subseteq \mathbf{U}$$

$G$  から  $\mathbf{U} - \mathbf{U}'$  の頂点を取り除いた部分グラフ  $G' = (\mathbf{U}', \mathbf{E}')$

$$\mathbf{E}' := \{\{X, Y\} \in \mathbf{E} \mid X, Y \in \mathbf{U}'\}$$

(単に、無向グラフ  $\mathbf{U}'$  とよぶことがある)

$G = (\mathbf{U}, \mathbf{E})$  が分解可能

完全であるか、 $\mathbf{U} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y}$  が以下の 5 条件を満足

- ①  $\mathbf{Y} \cap \mathbf{X}, \mathbf{Z} \cap \mathbf{X}, \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\}$
- ②  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \neq \{\}$
- ③ 無向グラフ  $\mathbf{Z}$  が完全
- ④  $\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G$
- ⑤ 無向グラフ  $\mathbf{X} \cup \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}$  がともに分解可能

## 分解可能 (続)

左は、分解可能である。実際、 $\mathbf{X} = \{X, Y\}$ ,  $\mathbf{Z} = \{Z\}$ ,  $\mathbf{Y} = \{W\}$

①  $\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \cap \mathbf{X}, \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\}$

②  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \neq \{\}$

③  $\mathbf{Z}$  は完全

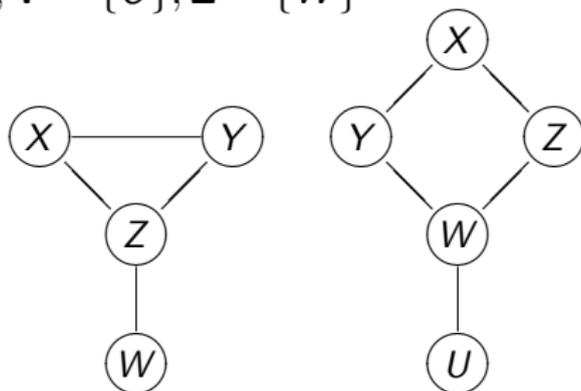
④  $\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G$

⑤  $\mathbf{X} \cup \mathbf{Z} = \{X, Y, Z\}$ ,  $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z} = \{Z, W\}$  は完全なので分解可能

右は、分解可能でない。

$\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \cap \mathbf{X}, \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\}$ ,  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \neq \{\}$ ,  $\langle \mathbf{X} | \mathbf{Z} | \mathbf{Y} \rangle_G$ ,  $\mathbf{Z}$  が完全

$\implies \mathbf{X} = \{X, Y, Z\}$ ,  $\mathbf{Y} = \{U\}$ ,  $\mathbf{Z} = \{W\}$



分解可能

分解可能ではない

## 再帰的に単純

無向グラフ  $G = (\mathbf{U}, \mathbf{E})$  のクリーク

$\mathbf{U}$  の完全な部分グラフ  $\mathbf{C} (\subseteq \mathbf{U})$

クリーク  $\mathbf{C} (\subseteq \mathbf{U})$  が極大クリーク

任意の  $\mathbf{C}' \supsetneq \mathbf{C}$  が完全ではない

$U (\in \mathbf{U})$  が単純

$U$  と隣接する頂点たちが極大クリークを構成

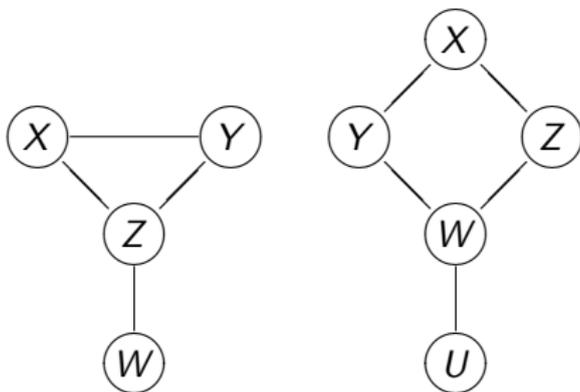
無向グラフ  $G = (\mathbf{U}, \mathbf{E})$  が再帰的に単純

$U_i, i = 1, \dots, n := |\mathbf{U}|$  が部分グラフ  $\mathbf{U}_i := \{U_i, \dots, U_n\}$  で単純となる  $\mathbf{U}$  の列  $\{U_i\}_{i=1}^n$  が存在

## 再帰的に単純 (続)

左は、再帰的に単純。たとえば、 $U_1 = X, U_2 = Y, U_3 = Z, U_4 = W$

右は、再帰的に単純ではない。 $U_1 = U$ を選択して、 $U_2$ が見出せない



再帰的に単純    再帰的に単純ではない

## 接合木

$G = (\mathbf{U}, \mathbf{E})$ : 無向グラフ

クリーク木  $T = (\mathbf{U}_T, \mathbf{E}_T)$

極大クリークすべてを含むクリークの集合  $\mathbf{U}_T$  を頂点集合とする木  
(辺集合を  $\mathbf{E}_T$  であらわす)

クリーク木における Running Intersection Property (RIP)

任意の異なる 2 頂点  $\mathbf{C}, \mathbf{C}' \in \mathbf{U}_T$  を結ぶ経路にある各頂点が  $\mathbf{C} \cap \mathbf{C}'$  を含む

RIP を満足するクリーク木を、無向グラフ  $G$  の接合木とよぶ

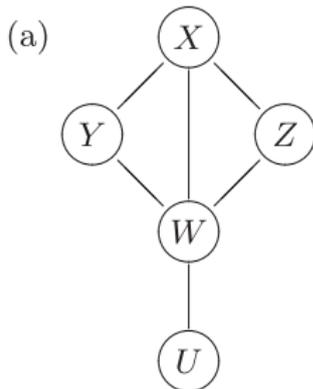
## 接合木 (続)

$C_1 = \{X, Y, W\}$ ,  $C_2 = \{X, Z, W\}$ ,  $C_3 = \{W, U\}$

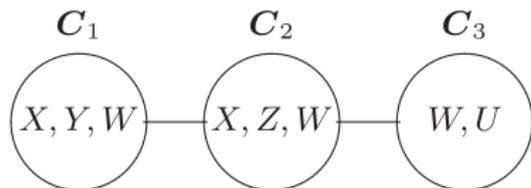
(b), (c) の各頂点は (a) のクリーク木

$C_1 \cap C_3 = \{W\} \subseteq C_2$ ,  $C_2 \cap C_3 = \{W\} \subseteq C_1$  より、RIP が満足。

$C_1 \cap C_2 = \{X, W\} \not\subseteq C_3$  となるので,  $C_3$  を  $C_1, C_2$  の間におけない。

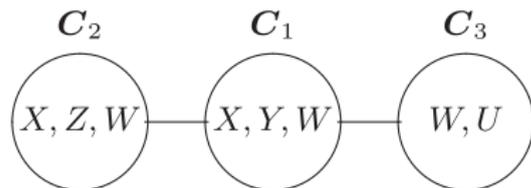


(b)



$$\{X, Y, W\} \cap \{W, U\} \subseteq \{X, Z, W\}$$

(c)



$$\{X, Z, W\} \cap \{W, U\} \subseteq \{X, Y, W\}$$

## 接合木 (続)

左は, 極大クリーク  $C_1 = \{X, Y, Z\}$ ,  $C_2 = \{Z, W\}$  をクリークとする接合木  $T = (\{C_1, C_2\}, \{\{C_1, C_2\}\})$  が存在

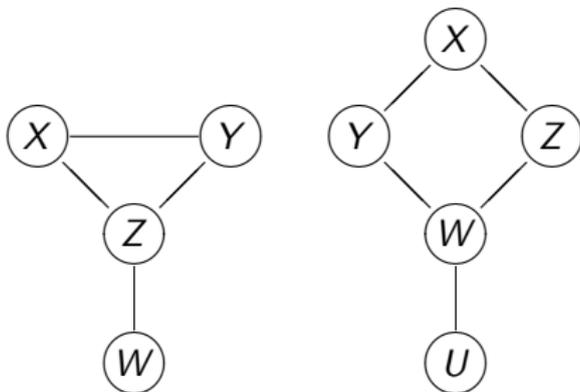
右は、接合木  $T$  が存在すれば

$C_1 = \{X, Y\}$ ,  $C_2 = \{X, Z\}$ ,  $C_3 = \{Z, W\}$ ,  $C_4 = \{W, Y\}$ ,  $C_5 = \{W, U\}$

$X$  を含むクリーク  $C_1, C_2$  は隣接、 $Y$  を含むクリーク  $C_1, C_4$  が連結

$Z$  を含むクリーク  $C_2, C_3$  が連結、 $W$  を含むクリーク  $C_3, C_4, C_5$  が連結

巡回経路  $C_1-C_2-C_3-C_4-C_1$  より、 $T$  が木であることと矛盾



接合木が存在      接合木が存在しない

## 接合木 (続)

クリーク木  $T = (\mathbf{U}_T, \mathbf{E}_T)$  が RIP を満足

$\iff$  各  $U \in \mathbf{U}$  を含む  $\mathbf{C} \in \mathbf{U}_T$  が連結された部分木を構成

### 定理 2.2

無向グラフ  $G$  について、次の 4 つの条件は同値

- ①  $G$  が chordal
- ②  $G$  が分解可能
- ③  $G$  が再帰的に単純
- ④  $G$  の接合木が存在

# 重み最大極大木アルゴリズム

## アルゴリズム 2.1: 重み最大極大木アルゴリズム

入力:  $\mathbf{U}$ ,  $w(\mathbf{e})$ ,  $\mathbf{e} \in \mathcal{E} := \{\{X, Y\} \mid X, Y \in \mathbf{U}, X \neq Y\}$ ,

出力:  $\sum_{\mathbf{e} \in \mathbf{E}} w(\mathbf{e})$  を最大とする  $\mathbf{U}$  を頂点とする木  $T = (\mathbf{U}, \mathbf{E})$ .

- ①  $\mathbf{E} \leftarrow \{\}$
- ②  $w(\mathbf{e})$  が最大の  $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$  について,  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} - \{\mathbf{e}\}$
- ③  $T' = (\mathbf{U}, \mathbf{E} \cup \{\mathbf{e}\})$  が巡回経路をもたないとき,  $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E} \cup \{\mathbf{e}\}$
- ④  $\mathcal{E} = \{\}$  であれば, 終了。そうでなければ, 2へ。

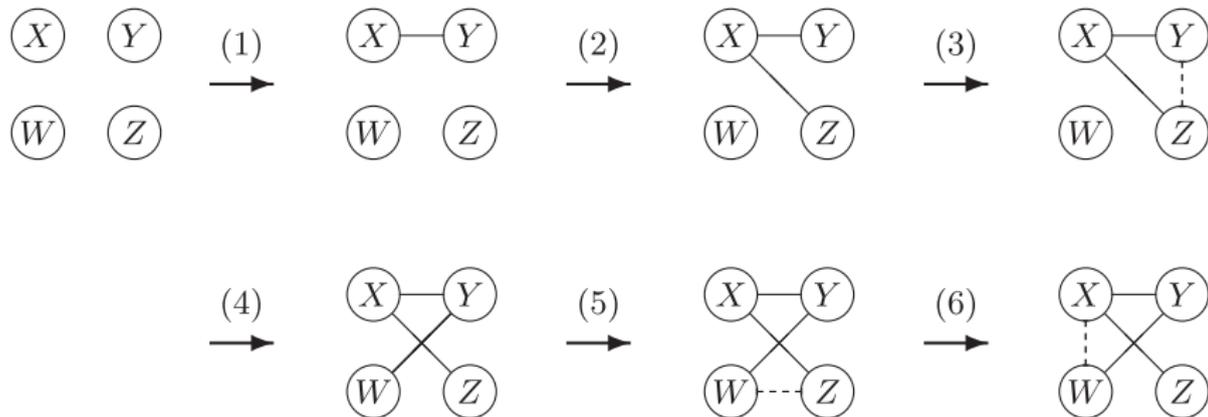
## Kruscal のアルゴリズム

- $w(\cdot)$  を最大: 重み最大
- $w(\cdot)$  を最小: コスト最小

## 重み最大極大木アルゴリズム (続)

- (例) (1)  $\{X, Y\}$  を  $E$  に加える。 (2)  $\{X, Z\}$  を  $E$  に加える。  
 (3) 巡回経路が生成されるので,  $\{Y, Z\}$  を  $E$  に入れない。  
 (4)  $\{Y, W\}$  を  $E$  に加える。  
 (5)(6) 巡回経路が生成されるので,  $\{Z, W\}, \{X, W\}$  は  $E$  に入れない。

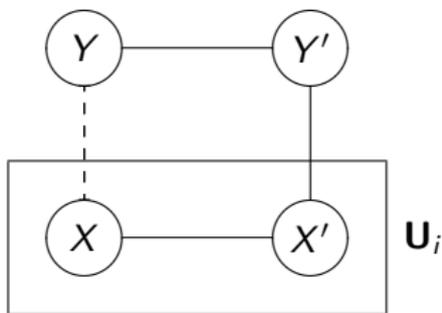
$w(\cdot, \cdot)$	X	Y	Z	W
X				
Y	6			
Z	5	4		
W	1	3	2	



## 定理 2.3

### 定理 2.3

アルゴリズム 2.2 は,  $\sum_{e \in E} w(e)$  を最大にする  $U$  の木  $T = (U, E)$  を出力。



## 定理 2.3 の証明

$\{(\{U\}, \{\})\}_{U \in \mathbf{U}}$  から木  $\{(\mathbf{U}, \mathbf{E})\}$  まで、 $\{(\mathbf{U}_1, \mathbf{E}_1), \dots, (\mathbf{U}_r, \mathbf{E}_r)\}$  が更新

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \cup \dots \cup \mathbf{U}_r, \quad \mathbf{E}_1 \cup \dots \cup \mathbf{E}_r \subseteq \mathbf{E}, \quad 1 \leq r \leq |\mathbf{U}|$$

- ① ある時点で、 $e = \{X, Y\}$ ,  $X \in \mathbf{U}_i$ ,  $Y \in \mathbf{U} - \mathbf{U}_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  が、 $w(e)$  を最大にし、巡回経路を生成せず、 $\{X, Y\} \notin \mathbf{E}$
- ②  $(\mathbf{U}, \mathbf{E})$  が  $\sum_{e \in \mathbf{E}} w(e)$  を最大にする

を仮定すると、 $X, Y$  を結ぶ経路で、 $\mathbf{U}_i$  との境界に  $X', Y'$  があると

$$w(\{X, Y\}) \geq w(\{X', Y'\}). \quad (22)$$

$(\mathbf{U}, \mathbf{E} \cup \{X, Y\} - \{X', Y'\})$  も木になるので、

$$\sum_{e \in \mathbf{E}} w(e) \geq \sum_{e \in \mathbf{E}} w(e) - w(\{X', Y'\}) + w(\{X, Y\}). \quad (23)$$

(22), (23) より、 $w(\{X', Y'\}) = w(\{X, Y\})$

## 接合木の生成

### アルゴリズム 2.2: chordal な無向グラフから接合木を生成

入力: chordal な  $G = (\mathbf{U}, \mathbf{E})$ ,

出力:  $T = (\mathbf{U}_T, \mathbf{E}_T)$

- ①  $\mathbf{U}_T \leftarrow \{\mathbf{C}_i \mid i = 1, \dots, m\}$  ( $\mathbf{C}_i, i = 1, \dots, m$ : 極大クリーク)
- ②  $\mathcal{E} \leftarrow \{\{\mathbf{C}_j, \mathbf{C}_k\} \mid j \neq k\}$
- ③  $\mathbf{E}_T \leftarrow \{\}$
- ④  $|\mathbf{C}_j \cap \mathbf{C}_k|$  が最大の  $\{\mathbf{C}_j, \mathbf{C}_k\} \in \mathcal{E}$  について,  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} - \{\{\mathbf{C}_j, \mathbf{C}_k\}\}$
- ⑤  $T' = (\mathbf{U}_T, \mathbf{E}_T \cup \{\{\mathbf{C}_j, \mathbf{C}_k\}\})$  が巡回経路をもたないとき,  $T \leftarrow T'$
- ⑥  $\mathcal{E} = \{\}$  であれば, 終了。そうでなければ, 4 へ。

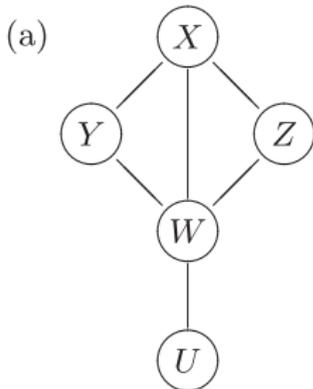
### アルゴリズム 2.2 は、アルゴリズム 2.1 を適用

- 各辺の重みの総和を最大
- $\{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\}$  に含まれる頂点の個数  $|\mathbf{C} \cap \mathbf{C}'|$  の総和を最大

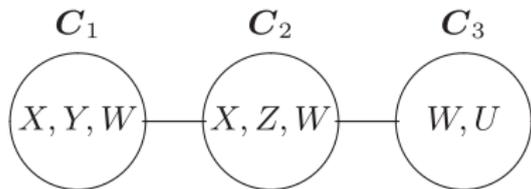
## 接合木の生成

(例)  $C_1 = \{X, Y, W\}$ ,  $C_2 = \{X, Z, W\}$ ,  $C_3 = \{W, U\}$

- 1  $|C_1 \cap C_2| = |\{X, W\}| = 2$  であるので, 最初にこの辺を結ぶ。
- 2  $|C_1 \cap C_3| = |C_2 \cap C_3| = |\{W\}| = 1$  であるので,  $\{C_1, C_3\}$  または  $\{C_2, C_3\}$  を辺として結ぶ。

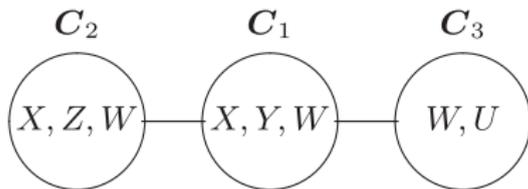


(b)



$$\{X, Y, W\} \cap \{W, U\} \subseteq \{X, Z, W\}$$

(c)



$$\{X, Z, W\} \cap \{W, U\} \subseteq \{X, Y, W\}$$

## 接合木の生成 (続)

### 定理 2.3

アルゴリズム 26 によって生成された  $T = (\mathbf{U}_T, \mathbf{E}_T)$  は接合木である。

証明:  $T = (\mathbf{U}_T, \mathbf{E}_T)$  の各辺の重みの総和は,  $\mathbf{U}_T$  が与えられると,

$$\begin{aligned} \sum_{\{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\} \in \mathbf{E}_T} |\mathbf{C} \cap \mathbf{C}'| &= \sum_{\{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\} \in \mathbf{E}_T} \sum_{U \in \mathbf{U}} 1[U \in \mathbf{C} \cap \mathbf{C}'] \\ &\leq \sum_{U \in \mathbf{U}} \left\{ \sum_{\mathbf{C} \in \mathbf{U}_T} 1[U \in \mathbf{C}] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

$$1[U \in \mathbf{C} \cap \mathbf{C}'] = \begin{cases} 1, & U \in \mathbf{C} \cap \mathbf{C}' \\ 0, & U \notin \mathbf{C} \cap \mathbf{C}' \end{cases}, \quad 1[U \in \mathbf{C}] = \begin{cases} 1, & U \in \mathbf{C} \\ 0, & U \notin \mathbf{C} \end{cases}$$

$G$  は chordal であり, 定理 2.2 より, 接合木が存在し,

$$\sum_{\{\mathbf{C}, \mathbf{C}'\} \in \mathbf{E}_T} 1[U \in \mathbf{C} \cap \mathbf{C}'] = \sum_{\mathbf{C} \in \mathbf{U}_T} 1[U \in \mathbf{C}] - 1$$

(RIP) を満足する  $T = (\mathbf{U}_T, \mathbf{E}_T)$  が存在する。

したがって, (24) の等号が成立する木  $T = (\mathbf{U}_T, \mathbf{E}_T)$  が得られる。

$G$  が chordal でない場合

$E$  に適当な要素を加えて chordal にした後, アルゴリズム??を適用

(各クリークに含まれる  $U$  の要素の数を少なくなるように三角化する)

( $E_T$  の要素を、両端の頂点の共通集合で表現)

$\max_{C \in E_T} |C|$  を最小にする  $T = (U_T, E_T)$  を見いだす

$\mathcal{NP}$  困難

- $\mathcal{P}$  問題
- $\mathcal{NP}$  完全問題
- $\mathcal{NP}$  困難問題

4章で詳しく検討