鈴木譲「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
2. グラフィカルモデル
2.1 Graphical Model

鈴木譲

大阪大学

2009 年 10 月 22 日

あらまし

1. 条件付独立性
2. 定理 2.1
3. グラフィカルモデル

条件付分布関数

X, Y, Z: 確率変数

$F_{Y|X}(y|x)$: $X = x \in X(\Omega)$ での $(Y \in (-\infty, y])$, $y \in \mathbb{R}$ の条件付確率

X のもとでの Y の条件付分布関数

$$F_{Y|X} : (y, x) \in Y(\Omega) \times X(\Omega) \mapsto F_{Y|X}(y|x) \in [0, 1]$$

各 $x \in X(\Omega)$ で、$\begin{cases} \mu_X(dx) :> 0, & \mu_X(x - \epsilon/2, x + \epsilon/2) > 0 \text{ for } \forall\epsilon > 0 \\ \mu_X(dx) := 0, & otherwise \end{cases}$

$$X^*(\Omega) := \{x \in X(\Omega) \mid \mu_X(dx) > 0\}$$

$F_{Y|X}(y|x), y \in \mathbb{R}$

$x \notin X^*(\Omega)$ では任意

条件付独立性

X, Y は Z のもとで条件付独立

$$F_{XY|Z}(x,y|z) = F_{X|Z}(x|z)F_{Y|Z}(y|z), x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ z \in Z^*(\Omega) \quad (1)$$

$$\int \{F_{X|YZ}(x|y,z) - F_{X|Z}(x|z)\}\mu_{Y|Z}(dy|z) = 0,\ x \in X(\Omega),\ z \in Z^*(\Omega)$$

$$F_{X|YZ}(x|y,z) = F_{X|Z}(x|z),\ x \in X(\Omega),\ y \in Y^*(\Omega),\ z \in Z^*(\Omega) \quad (2)$$

$\mathbf{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$, $U_i : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数の集合

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ は $\mathbf{Z}$ のもとで条件付独立 $I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})$

X, Y, Z を $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{U}$ に置き換えても、
条件付分布関数および条件付独立性は定義される

(確率測度 μ を明示する場合 $I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y})_\mu$)

$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ は独立

$\mathbf{Z} = \{\}$

条件付独立性 (続)

依存モデル

$I(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ が真となる $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ の集合

(特定の依存モデル M を仮定した $I(\cdot,\cdot,\cdot)$ を $I(\cdot,\cdot,\cdot)_M$ とかく)

(例) $\mathbf{X}(\Omega)$, $\mathbf{Y}(\Omega)$ が可算集合のとき，$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ が $\mathbf{Z}$ のもとで条件付独立
$\Longleftrightarrow$

$$\frac{P_{\mathbf{XYZ}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} = \frac{P_{\mathbf{XZ}}(\mathbf{x},\mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} \cdot \frac{P_{\mathbf{YZ}}(\mathbf{y},\mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}\ ,\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega)\ ,\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}(\Omega)\ ,\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega) \tag{3}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}} \frac{P_{\mathbf{XYZ}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} = \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} \frac{P_{\mathbf{XZ}}(\mathbf{x},\mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} \cdot \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}} \frac{P_{\mathbf{YZ}}(\mathbf{y},\mathbf{z})}{P_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}\ ,$$

$$\mathcal{X} \subseteq \mathbf{X}(\Omega),\ \mathcal{Y} \subseteq \mathbf{Y}(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega) \tag{4}$$

条件付独立性 (続)

(例) $F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}$，$F_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}$，$F_{\mathbf{XY}|\mathbf{Z}}$ が絶対連続であれば,

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}} = \int f_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z})\, d\mathbf{x},\ F_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}} = \int f_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{y}|\mathbf{z})\, d\mathbf{y},$$

$$F_{\mathbf{XY}|\mathbf{Z}} = \iint f_{\mathbf{XY}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{z})\, d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

なる $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}$，$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}$，$f_{\mathbf{XY}|\mathbf{Z}}$ (条件付確率密度関数) が存在

$$\begin{aligned} 0 &= F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z})F_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{y}|\mathbf{z}) - F_{\mathbf{XY}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{z}) \\ &= \iint \{f_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z})f_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{y}|\mathbf{z}) - f_{\mathbf{XY}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{z})\}\, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \end{aligned}$$

両辺を $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ で微分して,

$$f_{\mathbf{XY}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{z}) = f_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z})f_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{y}|\mathbf{z})$$

定理 2.1

定理 2.1

$I(\cdot,\cdot,\cdot) = I(\cdot,\cdot,\cdot)_\mu$ となる確率 $\mu_{\mathbf{U}}$ が存在するためには,

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}) \Longleftrightarrow I(\mathbf{Y},\mathbf{Z},\mathbf{X}), \tag{5}$$

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}\cup\mathbf{W}) \Longrightarrow I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{W}), \tag{6}$$

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}\cup\mathbf{W}) \Longrightarrow I(\mathbf{X},\mathbf{Z}\cup\mathbf{W},\mathbf{Y}), \tag{7}$$

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X},\mathbf{Z}\cup\mathbf{Y},\mathbf{W}) \Longrightarrow I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}\cup\mathbf{W}). \tag{8}$$

さらに, $\mu_{\mathbf{U}}(d\mathbf{u}) > 0$, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}(\Omega)$ であるためには

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Z}\cup\mathbf{W},\mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X},\mathbf{Z}\cup\mathbf{Y},\mathbf{W}) \Longrightarrow I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}\cup\mathbf{W}) \tag{9}$$

が必要

定理 2.1 (5) の証明

$$
\begin{aligned}
& I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \\
\iff \quad & F_{\mathbf{XY}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}|\mathbf{z}) - F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) F_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}}(\mathbf{y}|\mathbf{z}) = 0, \\
& \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}(\Omega),\ \ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega) \\
\iff \quad & I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X})
\end{aligned}
$$

定理 2.1 (6) の証明

$$
\begin{aligned}
& I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W}) \\
\Longrightarrow\quad & F_{\mathbf{X}|\mathbf{YZW}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\
& \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \\
\Longrightarrow\quad & \begin{cases} F_{\mathbf{X}|\mathbf{YZ}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega) \\ F_{\mathbf{X}|\mathbf{ZW}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \end{cases} \\
\Longrightarrow\quad & I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{W})
\end{aligned}
$$

定理 2.1 (7) の証明

$$
\begin{aligned}
& I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W}) \\
\Longrightarrow \quad & \begin{cases}
F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\
\qquad \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \\
F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\
\qquad \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega)
\end{cases} \\
\Longrightarrow \quad & F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{w}), \\
& \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{w} \in \mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \\
\Longrightarrow \quad & I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y})
\end{aligned}
$$

定理 2.1 (8) の証明

$$
\begin{aligned}
& I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X},\mathbf{Z}\cup\mathbf{Y},\mathbf{W}) \\
\Longrightarrow\ & \begin{cases}
F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{y},\mathbf{z}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\
\qquad \mathbf{x}\in\mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y}\in\mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{z}\in\mathbf{Z}^*(\Omega) \\
F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{y},\mathbf{z}), \\
\qquad \mathbf{x}\in\mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y}\in\mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{z}\in\mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{w}\in\mathbf{W}^*(\Omega)
\end{cases} \\
\Longrightarrow\ & F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}\mathbf{Z}\mathbf{W}}(\mathbf{x}|\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}), \\
& \qquad \mathbf{x}\in\mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y}\in\mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{z}\in\mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{w}\in\mathbf{W}^*(\Omega) \\
\Longrightarrow\ & I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}\cup\mathbf{W})
\end{aligned}
$$

定理 2.1 (9) の証明

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z} \cup \mathbf{Y}, \mathbf{W})$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} F_{\mathbf{X}|\mathbf{YZW}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{ZW}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{w}), \\ \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \\ F_{\mathbf{X}|\mathbf{YZW}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{YZ}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega) \end{cases}$$

$\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbf{W}^*(\Omega)$ について,

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{YZW}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{YZW}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{w}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{YZW}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{w}')$$

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Z}}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{YZW}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}(\Omega),\ \mathbf{y} \in \mathbf{Y}^*(\Omega),\ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^*(\Omega),\ \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*(\Omega),$$

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{W})$$

完全性予想

定理 2.1 の逆 (完全性予想)

1. (5)–(8) $\Longrightarrow I(\cdot,\cdot,\cdot) = I(\cdot,\cdot,\cdot)_\mu$ なる確率 $\mu_{\mathbf{U}}$ が存在
2. (9) $\Longrightarrow \mu_{\mathbf{U}}(d\mathbf{u}) \neq 0$ となるものが存在

条件付独立性の例

(例) (1) より、

$$I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \tag{10}$$

(6), (10), (5), (6), (10), (5) を順次適用して,

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) &\Longrightarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \wedge I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}) \\
&\Longleftrightarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}) \\
&\Longleftrightarrow I(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}) \\
&\Longrightarrow I(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{X} - \mathbf{Z}) \wedge I(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \\
&\Longleftrightarrow I(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{X} - \mathbf{Z}) \\
&\Longleftrightarrow I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}).
\end{aligned}$$

(10), (8), (5), (10), (8), (5) を順次適用して,

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}) &\Longrightarrow I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \wedge I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y} - \mathbf{Z}) \\
&\Longrightarrow I(\mathbf{X} - \mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \\
&\Longrightarrow I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X} - \mathbf{Z}) \\
&\Longrightarrow I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \wedge I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X} - \mathbf{Z}) \\
&\Longrightarrow I(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}) \\
&\Longrightarrow I(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}).
\end{aligned}$$

条件付独立性の例

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}) \Longleftrightarrow I(\mathbf{X}-\mathbf{Z},\mathbf{Z},\mathbf{Y}-\mathbf{Z}), \tag{11}$$

$$I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\{\}) \tag{12}$$

(例)
X, Y: 確率 1/2 で 0, 1 が生じる独立な確率変数
$\mathbf{U} = \{X, Y, X+Y, -Y\}$
$\mathbf{X} = \{X\}$, $\mathbf{Y} = \{Y\}$, $\mathbf{Z} = \{X+Y\}$, $\mathbf{W} = \{-Y\}$ を (9) に適用

$$\begin{aligned} & \mu(X = x|X+Y = x+y, Y = y, -Y = -y) \\ = \ & \mu(X = x|X+Y = x+y, Y = y) \\ = \ & \mu(X = x|X+Y = x+y, -Y = -y), \quad x, y \in \{0,1\} \end{aligned}$$

$I(\mathbf{X},\mathbf{Z}\cup\mathbf{W},\mathbf{Y}) \wedge I(\mathbf{X},\mathbf{Z}\cup\mathbf{Y},\mathbf{W})$ は真

$$\mu(X = x|X+Y = x+y, Y = y, -Y = -y) \neq \mu(X = x|X+Y = x+y)$$

$I(\mathbf{X},\mathbf{Z},\mathbf{Y}\cup\mathbf{W})$ は偽
$\mu_{\mathbf{U}}(d\mathbf{u}) = 0$ なる $\mathbf{u} \in \mathbf{U}(\Omega)$ が存在し、(9) が成立しない例

グラフィカルモデル

依存モデルの候補の数

定理 2.1 の制約条件を仮定しても、**U** に含まれる要素の数とともに非常に大きくなる。

グラフィカルモデル

確率変数の依存モデルを

無向グラフ ： Markov ネットワーク

有向非巡回グラフ ： Bayesian ネットワーク

で近似的に表現