# 鈴木譲「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
# 1. 確率論の基礎
# 1.4 Kullback-Leibler 情報量

鈴木譲

大阪大学

2009 年 10 月 22 日

# あらまし

1. 期待値・分散
2. Kullback-Leibler 情報量
3. 相互情報量

# 期待値・分散

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$
$X : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数

$$\int_{x \in X(\Omega)} |x| \mu_X(dx) < \infty$$

**期待値**

$$E[X] := \int_{x \in X(\Omega)} x \mu_X(dx) = \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu(d\omega)$$

**分散**

$$V[X] := E[(X - E[X])^2] < \infty$$

$$V[X] = E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

# 期待値・分散 (続)

(例) $f_X(x) := \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{x}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\pi}\log(1+t^2) = \infty$$

(例) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\
&\le |\mu| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} |x-\mu| \exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= |\mu| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma < \infty
\end{aligned}$$

# 期待値・分散 (続)

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\sigma dy + \mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \mu$$

$$V[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\sigma dy = \sigma^2$$

(例) $A \in \mathcal{F}$ の指示関数 $I_A$ は確率変数になる (命題 1.4)。

$$E[I_A] = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(\overline{A}) = \mu(A)$$

$$V[I_A] = E[I_A^2] - E[I_A]^2 = E[I_A] - E[I_A]^2 = \mu(A) - \mu(A)^2 = \mu(A)(1-\mu(A))$$

# 期待値・分散 (続)

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$E[aX + bY] = \int (ax + by)\mu_{XY}(dx, dy)$$
$$= a\int x\mu_X(dx) + b\int y\mu_Y(dy) = aE[X] + bE[Y]$$

$X, Y$: 独立のとき、

$$E[XY] = \int xy\mu_{XY}(dx, dy) = \int xy\mu_X(dx)\mu_Y(dy)$$
$$= \int x\mu_X(dx)\int y\mu_Y(dy) = E[X]E[Y].$$

$$E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[X - E[X]]E[Y - E[Y]] = 0.$$

$$V(aX + bY) = E[\{a(X - E[X]) + b(Y - E[Y])\}^2]$$
$$= E[a^2(X - E[X])^2 + b^2(Y - E[Y])^2 + 2ab(X - E[X])(Y - E[Y])]$$
$$= a^2V[X] + b^2V[Y]$$

# 期待値・分散 (続)

(例) $X_1, \cdots, X_n$: $E[X_i] = \mu$, $V[X_i] = \sigma^2$ なる独立な $n$ 個の確率変数

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \mu$$

$$V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V[X_i] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$k$ 次モーメント

$E[|X|^k] < \infty$

$E[|X|^n] < \infty \Longrightarrow E[|X|^k] < \infty, \ \ k = 1, \cdots, n-1 \ (|x|^k \leq 1 + |x|^n)$

# $\mathcal{F}$ 上可測な関数の性質

$\mathcal{F}$ 上可測な関数の性質

$$\begin{array}{ll} & g:\Omega \to \mathbb{R} \text{ が } \mathcal{F} \text{ 上可測}, \ f: g(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ が連続} \\ \Longrightarrow & f \circ g : \Omega \to \mathbb{R} \text{ が } \mathcal{F} \text{ 上可測} \end{array}$$

証明: 任意の閉区間は、可算個の閉区間の像である。実際、

$$\begin{array}{ll} & \min f(x) = A, \max f(x) = B \\ \Longrightarrow & \exists a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 < \cdots \in \mathbb{R} \ s.t. \\ & A = \min_{x \in [a_i, b_i]} f(x), B = \max_{x \in [a_i, b_i]} f(x), i = 1, 2, \cdots \end{array}$$

$$\{\omega \in \Omega | f(g(\omega)) \in [A, B]\} = \{\omega \in \Omega | g(\omega) \in \cup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]\} \in \mathcal{F}$$

$$D \in \mathcal{B} \Longrightarrow \{\omega \in \Omega | f(g(\omega)) \in D\} \in \mathcal{F}$$

# Kullback-Leibler 情報量

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$
$\nu$: $\nu(\Omega) \leq 1$ を満足する測度, $\mu \ll \nu$

$\mu$ の $\nu$ に関する Kullback-Leibler 情報量

$$D(\mu||\nu) := \int_{\omega\in\Omega} \log\left(\left.\frac{d\mu}{d\nu}\right|_{\omega}\right)\mu(d\omega)$$

$\dfrac{d\mu}{d\nu}$: $\mathcal{F}$ 上可測より、$\log(\dfrac{d\mu}{d\nu})$: $\mathcal{F}$ 上可測。$z-1 \geq \log z$, $z \in \mathbb{R}$ より,

$$D(\mu||\nu) \geq \int_{\omega\in\Omega}\left(1 - 1\left/\left.\frac{d\mu}{d\nu}\right|_{\omega}\right.\right)\mu(d\omega) = 1 - \int_{\omega\in\Omega}\nu(d\omega) \geq 0$$

確率変数 $X$ についても同様に

$$D(\mu_X||\nu_X) = \int_{x\in X(\Omega)} \log\left(\left.\frac{d\mu_X}{d\nu_X}\right|_{x}\right)\mu_X(dx) \geq 0$$

# Kullback-Leibler 情報量 (続)

(例) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における離散確率変数 $X$ について,
$\mu_X(\{x\}) := \mu(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$: $X$ の確率測度,
$\nu_X(\{x\}) := \nu(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$: $\sum_{x \in X(\Omega)} \nu_X(\{x\}) \leq 1$ をなる測度

$$\mathrm{support}(\mu_X) := \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_X(\{x\}) > 0\}$$

$$\mathrm{support}(\nu_X) := \{x \in \mathbb{R} \mid \nu_X(\{x\}) > 0\}$$

$$\mu_X \ll \nu_X \Longrightarrow \mathrm{support}(\mu_X) \subseteq \mathrm{support}(\nu_X)$$

$x \in \mathrm{support}(\mu_X)$ に対して、$\left.\dfrac{d\mu_X}{d\nu_X}\right|_x = \dfrac{\mu_X(\{x\})}{\nu_X(\{x\})}$

$$D(\mu_X || \nu_X) = \sum_{x \in \mathrm{support}(\mu_X)} \mu_X(\{x\}) \log \frac{\mu_X(\{x\})}{\nu_X(\{x\})} \geq 0$$

## Kullback-Leibler 情報量 (続)

$\lambda_X$: Lebesgue 測度
$\mu_X \ll \nu_X \ll \lambda_X$

$$f_X := \frac{d\mu_X}{d\lambda_X}, \qquad g_X := \frac{d\nu_X}{d\lambda_X}$$

とおけば，系 1.1 より，$\nu_X$-測度 0 の点を除いて，

$$\frac{d\mu_X}{d\nu_X} = \frac{d\mu_X}{d\lambda_X} \Big/ \frac{d\nu_X}{d\lambda_X} = \frac{f_X}{g_X}$$

$$D(\mu_X \| \nu_X) = \int_{x \in X(\Omega)} f_X(x) \log \frac{f_X(x)}{g_X(x)} \lambda_X(dx) \geq 0$$

# 相互情報量

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$
$X, Y$: 確率変数

- $\nu_{XY}(D, D') = \mu_X(D)\mu_Y(D')$ なる $\nu_{XY} : \mathcal{B}^2 \to [0,1]$ は測度
- $\nu_{XY}(X(\Omega), Y(\Omega)) \leq 1$
- $\mu_{XY} \ll \nu_{XY}$

**$X, Y$ の相互情報量**

$I(X, Y) := D(\mu_{XY} || \nu_{XY})$

$$I(X, Y) \geq 0$$

$$I(X, Y) = I(Y, X)$$

# 相互情報量 (続)

$X(\Omega), Y(\Omega)$ が可算集合のとき

$$P_{XY}(x, y) := \mu_{XY}(\{x\}, \{y\})$$

$$P_X(x) := \mu_X(\{x\}), \qquad P_Y(y) := \mu_Y(\{y\})$$

$$P_{X|Y}(x|y) := \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)}$$

$X, Y$ の相互情報量 $I(X, Y)$

$$I(X, Y) := \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{XY}(x, y) \log \frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x) P_Y(y)} = I(Y, X)$$

# エントロピー

## $X$ のエントロピー $H(X)$

$$H(X) := I(X,X) = \sum_{x \in X(\Omega)} -P_X(x) \log P_X(x) \geq 0$$

## $X, Y$ の同時エントロピー

$$H(XY) := \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} -P_{X,Y}(x,y) \log P_{X,Y}(x,y) \geq 0$$

## $Y$ のもとでの $X$ の条件付エントロピー $H(X|Y)$

$$H(X|Y) := \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} -P_{XY}(x,y) \log P_{X|Y}(x|y) \geq 0$$

$$H(XY) = H(X) + H(Y|X),\ \ I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$