

# 鈴木讓「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)

## 1. 確率論の基礎

### 1.2 確率

鈴木讓

大阪大学

2009年10月15日

# あらまし

- 1 確率
- 2 条件付確率
- 3 確率変数

確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 

$\Omega$ : 全体集合 (標本空間)

$\mathcal{F}$ :  $\Omega$  の  $\sigma$  集合体 ( $\mathcal{F}$  の要素を事象という)

$\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]: \mu(\Omega) = 1$  なる測度 (確率)

## 確率論の公理

$$\textcircled{1} \mu(\Omega) = 1$$

$A \in \mathcal{F}$  に対して

$$\textcircled{2} \mu(A) \geq 0$$

互いに排他的な事象の列  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して、

$$\textcircled{3} \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(確率論の公理)。  $\mu$  は、測度であるから、  $A, B \in \mathcal{F}$  に対して、

$$\textcircled{4} \mu(\{\}) = 0$$

$$\textcircled{5} A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$$

1., 3. から、  $A \in \mathcal{F}$  に対して、

$$\textcircled{6} \mu(\bar{A}) = 1 - \mu(A)$$

$$\textcircled{7} \mu(A) \leq 1$$

## 確率測度の連続性

## 命題 1.2

$A \in \mathcal{F}$  および  $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$  に対して、

- ①  $\mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$
- ②  $A_n \rightarrow A \implies \mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$

証明:

- ①  $B_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ,  $C_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$   
 命題 1.1 ( $A_n \uparrow A \implies \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ ,  $A_n \downarrow A \implies \mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ ) より、

$$\mu(A_n) \geq \mu(B_n) \rightarrow \mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

$$\mu(A_n) \leq \mu(C_n) \rightarrow \mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

- ② 1 で、 $A := \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$  とおく。

## 条件付確率

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ : 確率空間

$\mathcal{G}, \mathcal{H} (\subseteq \mathcal{F})$ :  $\sigma$ -集合体

$A \in \mathcal{F}$  の  $\mathcal{G}$  のもとでの条件付確率

Radon-Nikodym の定理から、各  $G \in \mathcal{G}$  について

$$\mu(A \cap G) = \int_G f_A(\omega) \mu(d\omega)$$

なる  $\mathcal{G}$  上可測な  $f_A : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  が存在

$\int_G (f_A(\omega) - h_A(\omega)) \mu(d\omega) = 0$ ,  $G \in \mathcal{G}$  なる  $h_A$  も条件付確率

$\mathcal{G}, \mathcal{H}$  は独立

各  $A \in \mathcal{H}$  について,  $f_A$  が  $\omega \in \Omega$  によらず一定値  $\mu(A)$  をとる

## 条件付確率 (続)

(例)  $\mathcal{G} = \langle B_1, B_2, \dots \rangle$ ,  $\mu(B_i) > 0$ ,  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

各  $G \in \mathcal{G}$  で  $\mu(A \cap G) = \sum_{B_i \subseteq G} \mu(A \cap B_i) = \sum_{B_i \subseteq G} \frac{\mu(A \cap B_i)}{\mu(B_i)} \mu(B_i)$

$$\omega \in B_i \implies f_A(\omega) = \frac{\mu(A \cap B_i)}{\mu(B_i)}$$

特に、 $\mathcal{G} = \{\Omega, \{\}, B, \bar{B}\}$ ,  $0 < \mu(B) < 1$  のとき、条件付確率は

$$\mu(A|B) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

$\mu(A) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$  のとき  $A, B$  は独立

## 確率変数

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ : 確率空間

確率変数  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{F}$  上可測

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in D\} \in \mathcal{F}, \quad D \in \mathcal{B}$$

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}, \quad x \in \mathbb{R}$$



## 確率変数 (続)

(例)  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $\mathcal{F} = \{\Omega, \{\}\}$

$X(\omega_1) = x_1 < x_2 = X(\omega_2)$  なる  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  が存在すれば、

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_1\} = \{\omega_1\}, \quad \{\omega \in \Omega \mid x_1 < X(\omega) \leq x_2\} = \{\omega_2\}$$

$\mathcal{F} \supseteq \{\Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\}\}$  となり、矛盾。したがって、 $X(\omega_1) = X(\omega_2)$

## 離散確率変数

 $X$  は離散確率変数 $X(\Omega)$  が可算集合

- $\mathcal{F} = \langle \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \mid x \in X(\Omega) \rangle$
- $|X(\Omega)| = m \implies |\mathcal{F}| = 2^m$

 $P_X(x)$ :  $(X = x)$ ,  $x \in X(\Omega)$  の確率 $P_{XY}(x, y)$ :  $(X = x, Y = y)$ ,  $x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)$  の確率 $P_Z(z) > 0$  のとき $P_{X|Z}(x|z) := \frac{P_{XZ}(x, z)}{P_Z(z)}$ :  $Z(\omega) = z$  のもとでの  $(X(\omega) = x)$  の条件付確率 $P_{XY|Z}(x, y|z) := \frac{P_{XYZ}(x, y, z)}{P_Z(z)}$ :  $Z(\omega) = z$  のもとでの $(X(\omega) = x, Y(\omega) = y)$  の条件付確率

## 確率変数の性質

## 命題 1.3

$X, Y$  が確率変数であるとき

- ①  $X + Y$  は確率変数。
- ② 任意の  $k \in \mathbb{R}$  について,  $kX$  は確率変数。
- ③  $XY$  は確率変数。
- ④  $|X|$  は確率変数。
- ⑤  $\max\{X, Y\}$  は確率変数。

証明: テキスト参照 (13 ページ)

## 確率変数の性質 (続)

$$A \subseteq \Omega$$

$A$  の指示関数

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

## 命題 1.4

$I_A$  が確率変数  $\iff A$  が事象

$$\text{証明: } (I_A \leq x) = \begin{cases} \{\}, & x < 0 \\ \bar{A}, & 0 \leq x < 1 \\ \Omega, & 1 \leq x \end{cases}$$

$$A \in \mathcal{F} \iff \bar{A}, \Omega, \{\} \in \mathcal{F} \iff (I_A \leq x) \in \mathcal{F}, x \in \mathbb{R}$$