鈴木譲「ベイジアンネットワーク入門」(培風館)
1. 確率論の基礎
1.1 集合

鈴木譲

大阪大学

2009 年 10 月 1 日

あらまし

1. 集合
2. σ-集合体
3. σ-集合体上の測度
4. σ-集合体上の Lebesgue 積分
5. 絶対連続性と Radon-Nikodym の定理

集合

ω が集合 A の要素であることを、$\omega \in A$ とかく

集合 A は集合 B の部分集合 $(A \subseteq B)$

$\omega \in A \Longrightarrow \omega \in B$

集合 A と集合 B は等しい $(A = B)$

$A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$

集合 A の補集合 $\bar{A}$

$\omega \in A \Longrightarrow \omega \notin \bar{A}$

集合 A, B の演算

和 $A \cup B$、積 $A \cap B$、差 $A \cap \bar{B}$ $(A \backslash B,\ A - B)$

($\{A_i\}_{i=1}^n$ の和、積を $\cup_{i=1}^n A_i$, $\cap_{i=1}^n A_i$ であらわす)

集合 (続)

集合 A が空集合 $A = \phi$ $(A = \{\})$

各 $\omega \in \Omega$ について、$\omega \notin A$

集合 A, B は排他的

$A \cap B = \phi$

$\mathbb{Q}$: 有理数全体

有限集合、可算集合、無限集合

1. 有限集合は可算集合
2. $\mathbb{Q}$ は可算集合

集合列の極限

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限 (A_n に無限回含まれる要素の集合)

$\limsup_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{j=n}^{\infty} A_j$

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ の下極限 (A_n に有限回を除いて含まれる要素の集合)

$\liminf_{n\to\infty} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{j=n}^{\infty} A_j$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} A_n$

$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ のときの両辺の値

単調増加と単調減少

1. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ (単調増加) $\Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$
2. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ (単調減少) $\Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$

$A_n \uparrow A$ $\{A_n\}$ が単調増加で極限が A

$A_n \downarrow A$ $\{A_n\}$ が単調減少で極限が A

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ のとき、

$a_n \uparrow a$ $\{a_n\}$ が単調増加 $(a_1 \le a_2 \le \cdots)$ で極限が a

$a_n \downarrow a$ $\{a_n\}$ が単調減少 $(a_1 \ge a_2 \ge \cdots)$ で極限が a

σ-集合体

Ω: 全体集合

σ 集合体の公理 ($\mathcal{F}$ が σ 集合体)

1. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
2. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
3. $\Omega \in \mathcal{F}$

σ 集合体の性質

4. $\{\} \in \mathcal{F}$
5. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
6. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}, \liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$

σ-集合体 (続)

証明:

4. 1,3 より、4 は明らか
5. 1,2,1 より、

$$
\begin{aligned}
A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \quad &\Longrightarrow \quad \bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{\cap_{n=1}^{\infty} A_n} = \cup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \in \mathcal{F} \\
&\Longrightarrow \quad \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}
\end{aligned}
$$

6. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ のとき、2 より $B_n := \cup_{j=n}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$、5 より、

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{j=n}^{\infty} A_j = \cap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$$

5 より、$C_n := \cap_{j=n}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$、2 より、

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{j=n}^{\infty} A_j = \cup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{F}$$

σ-集合体の生成元

$(\Omega, \mathcal{F})$: (全体集合,σ-集合体)

$A_1, A_2, \cdots \subseteq \Omega$ が σ-集合体 $\mathcal{F}$ の生成元

$\{\Omega, \phi, A_1, A_2, \cdots\}$ に可算回の集合演算を施したものが $\mathcal{F}$ に一致

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$

1. $\mathcal{F} = \{\Omega, \phi\}$
2. $\mathcal{F} = \{\Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \phi\} \Longrightarrow \{\omega_1\}$ も $\{\omega_2\}$ も $\mathcal{F}$ の生成元。

$\mathbb{R}$ の Borel 集合族

$\mathbb{R}$: 実数全体

$\mathbb{R}$ の Borel 集合族

1. $(a, b) \in \mathcal{B},\ a < b, a, b \in \mathbb{R}$

を生成元にもつ σ-集合体

2. $\{a\} \in \mathcal{B},\ a \in \mathbb{R}$
3. $[a, b] \in \mathcal{B}, (a, b] \in \mathcal{B}, [a, b) \in \mathcal{B},\ a < b, a, b \in \mathbb{R}$
4. $[a, \infty), (a, \infty), (-\infty, b], (-\infty, b), a, b \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ の Borel 集合族 (続)

証明:

2. 1 より、各 $n \geq 1$ で、$M_n := (a - 1/n, a + 1/n) \in \mathcal{B}$。そして、
$$x \neq a \Longrightarrow x \notin \cap_{n=1}^{\infty} M_n$$
実際、$\epsilon := |x - a| > 0$ とおくと、
$$\begin{cases} a < x, n > 1/\epsilon & \Longrightarrow & a + 1/n < x \\ x < a, n \geq 1/\epsilon & \Longrightarrow & x \leq a - 1/n, \end{cases}$$
$a \in \cap_{n=1}^{\infty} M_n$ も成立。σ 集合体の性質 5 から、$\{a\} = \cap_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{B}$。
3. (a, b) と $\{a\}, \{b\}$ との和をとって、$[a, b] \in \mathcal{B}, (a, b] \in \mathcal{B}, [a, b) \in \mathcal{B}$。
4. $M_n := [a, n] \in \mathcal{B}$ とおくと、σ 集合体の公理 2 より、$[a, \infty) = \cup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{B}$。同様に、
$$(a, \infty), (-\infty, b], (-\infty, b), a, b \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$ の Borel 集合族 (続)

Borel 集合族: $\mathbb{R}$ の区間で生成される σ-集合体

$(a, b) \in \mathcal{B},\ a < b, a, b \in \mathbb{R}$ を生成元にもつ σ-集合体
$[a, b] \in \mathcal{B},\ a < b, a, b \in \mathbb{R}$ を生成元にもつ σ-集合体
$[a, \infty) \in \mathcal{B},\ a \in \mathbb{R}$ を生成元にもつ σ-集合体
$(-\infty, b] \in \mathcal{B},\ b \in \mathbb{R}$ を生成元にもつ σ-集合体

σ-集合体上の加法的集合関数

$(\Omega, \mathcal{F})$: (全体集合, σ-集合体)

$\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が加法的集合関数

互いに排他的な $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ に対して、

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 有界な加法的集合関数
$A \in \mathcal{F}$
$A_1, A_2 \cdots, \in \mathcal{F}$

命題 1.1

1. $A_n \uparrow A \Longrightarrow \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$
2. $A_n \downarrow A \Longrightarrow \mu(A_n) \downarrow \mu(A)$

σ-集合体上の加法的集合関数 (続)

証明:

1. $B_1 := A_1, B_n := A_n - \cup_{k=1}^{n-1} A_k, n = 2, 3, \cdots$
   $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は排他的であり、$A = \cup_{k=1}^{\infty} B_k, A_n = \cup_{k=1}^{n} B_k$

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

2. $\mu(\Omega) < \infty, \mu(A) < \infty$ より、

$$\begin{aligned} A_n \downarrow A &\implies \overline{A_n} \uparrow \overline{A} \\ &\implies \mu(\Omega) - \mu(A_n) = \mu(\overline{A_n}) \uparrow \mu(\overline{A}) = \mu(\Omega) - \mu(A) \\ &\implies \mu(A_n) \downarrow \mu(A) \end{aligned}$$

σ-集合体上の測度

$(\Omega, \mathcal{F})$: (全体集合, σ-集合体)
$\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$: 加法的集合関数

μ が測度

1. 各 $A \in \mathcal{F}$ に対して、$\mu(A) \geq 0$
2. $\mu(\{\}) = 0$

$A, B \subseteq \Omega$

$$A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B - A) = \mu(A \cup (B - A)) = \mu(B)$$

Lesbesgue 測度

$\lambda : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ 測度

λ が Lesbesgue 測度

$\lambda([a, b]) = b - a,\ a \le b,\ a, b \in \mathbb{R}$

1. $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b)) = \lambda((a, b]) = \lambda((a, b)) = b - a$
2. $\lambda(\{a\}) = 0,\ a \in \mathbb{R}$
3. $A \subseteq \mathbb{R}$ が可算集合 $\Longrightarrow \lambda(A) = 0$
4. $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

$$\begin{aligned} & \lambda([a, b]) - \lambda([a, b)) > \epsilon \ge 1/n > 0 \\ \Longrightarrow\quad & \lambda([a, b)) = \lambda([a, b - \frac{1}{n}]) + \lambda((b - \frac{1}{n}, b)) \\ & \ge b - a - \frac{1}{n} \ge \lambda([a, b]) - \epsilon > \lambda([a, b)) \end{aligned}$$

Cantor 関数

$\Omega = [0, 1)$

$$A_{i,j} := [(3i+1)3^{-j}, (3i+2)3^{-j}) \in \mathcal{B}, i = 0, 1, \cdots, 3^{j-1} - 1, j = 1, 2, \cdots$$

$$A := \Omega - \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{i=0}^{3^{j-1}-1} A_{i,j} \in \mathcal{B}$$

$$A_n := \Omega - \cup_{j=1}^{n} \cup_{i=0}^{3^{j-1}-1} A_{i,j},\ \ n \geq 1\ ,\ \ A_0 = \Omega$$

$$\lambda(A_n) = \frac{2}{3}\lambda(A_{n-1}) = (\frac{2}{3})^n$$

集合 A の各要素

“0”, “1”, “2” で表現したときに小数点以下に “1” が出現しない
A は可算集合ではないが、$\lambda(A) = 0$

σ-集合体上可測な関数

$(\Omega, \mathcal{F})$: (全体集合, σ-集合体)

$g : \Omega \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{F}$ 上可測

$$D \in \mathcal{B} \Longrightarrow \{\omega \in \Omega | g(\omega) \in D\} \in \mathcal{F}$$

例: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$ $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \phi\}$

$g_1 : \begin{cases} \omega_1 \mapsto 1 \\ \omega_2 \mapsto 2 \end{cases}$ は、$\mathcal{F}_1$ 上可測、$\mathcal{F}_2$ 上可測ではない

$g_2 : \Omega \to \{1\}$ は、$\mathcal{F}_1$ 上、$\mathcal{F}_2$ 上ともに可測

σ-集合体上の Lebesgue 積分

$(\Omega, \mathcal{F})$: (全体集合, σ-集合体)
$\{A_i\}$: $A_i \in \mathcal{F}$, $\cup_i A_i = A \subseteq \Omega$, $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$
$g: \Omega \to \mathbb{R}$: $\mathcal{F}$ 上可測

$$g_+(\omega) := \begin{cases} g(\omega) & g(\omega) > 0 \\ 0 & g(\omega) < 0 \end{cases}, \quad g_-(\omega) := \begin{cases} -g(\omega) & g(\omega) < 0 \\ 0 & g(\omega) > 0 \end{cases}$$

ν: 測度

g が ν に関して積分可能

$$I_+ := \sup_{\{A_i\}} \sum_i [\inf_{\omega \in A_i} g_+(\omega)] \nu(A_i) < \infty$$

$$I_- := \sup_{\{A_i\}} \sum_i [\inf_{\omega \in A_i} g_-(\omega)] \nu(A_i) < \infty$$

g の A における ν に関して積分 ($\int_A g d\nu$)

$I_+ - I_-$

絶対連続性

$(\Omega, \mathcal{F})$: (全体集合, σ-集合体)

測度 ν が σ-有限

$\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\nu(A_i) < \infty$ なる $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在

ν, μ: σ-有限な $\mathcal{F}$ 上の測度

μ は ν に関して絶対連続 ($\mu << \nu$)

$$\nu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$$

Radon-Nikodim の定理

$(\Omega, \mathcal{F})$: (全体集合, σ-集合体)
ν, μ: σ-有限な $\mathcal{F}$ 上の測度で、$\mu << \nu$

定理 1.1 (Radon-Nikodim の定理)

各 $A \in \mathcal{F}$ について、$\mu(A) = \int_A f d\nu$ となる $\mathcal{F}$ 上可測な関数

$$\frac{d\mu}{d\nu}(\omega) := f(\omega) \geq 0 \ , \ \omega \in \Omega$$

が存在し、ν-測度 0 の点を除いて一意

Radon-Nikodym の定理の適用例

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$
f: $\mathcal{F} = \{\Omega, \phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$ 上可測

$$\mu(\{\omega_1\}) = \int_{\{\omega_1\}} f d\nu = f(\omega_1)\nu(\{\omega_1\})$$

$$\mu(\{\omega_2\}) = \int_{\{\omega_2\}} f d\nu = f(\omega_2)\nu(\{\omega_2\})$$

$$f : \omega_i \mapsto \mu(\{\omega_i\})/\nu(\{\omega_i\})\ ,\ \ i = 1, 2$$

$\nu(\{\omega_i\}) = 0$ であれば、$f(\omega_i)$ は一意ではない

Radon-Nikodym の定理の系

系 1.1

$\nu_1 << \nu_2 << \nu_3$ のとき、ν_3 測度 0 の点を除いて、$\dfrac{d\nu_1}{d\nu_3} = \dfrac{d\nu_1}{d\nu_2} \cdot \dfrac{d\nu_2}{d\nu_3}$。さらに $\nu_2 << \nu_1$ のとき、$\dfrac{d\nu_2}{d\nu_1} = 1/\dfrac{d\nu_1}{d\nu_2}$

証明: $\dfrac{d\nu_1}{d\nu_2} = f, \dfrac{d\nu_2}{d\nu_3} = g$ であれば、$\{A_{i,j}\}$ を $\{A_i\}$ の分割として、

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \int f d\nu_2 = \sup_{\{A_i\}} \sum_i [\inf_{\omega \in A_i} f(\omega)] \nu_2(A_i) \\
&= \sup_{\{A_i\}} \sum_i [\inf_{\omega \in A_i} f(\omega)] \{ \sup_{\{A_{i,j}\}} \sum_j [\inf_{\omega \in A_{i,j}} g(\omega)] \nu_1(A_{i,j}) \} \\
&= \sup_{\{A_i\}} \sup_{A_{i,j}} \sum_{i,j} [\inf_{\omega \in A_i} f(\omega)][\inf_{\omega \in A_{i,j}} g(\omega)] \nu_1(A_{i,j}) \\
&= \sup_{\{A_{i,j}\}} \sum_{i,j} [\inf_{\omega \in A_{i,j}} f(\omega) g(\omega)] \nu_1(A_{i,j}) = \int f g d\nu_3
\end{aligned}$$