4.6 条件付最大・最小問題

鈴木 譲

2009 年 7 月 22 日 (水)

目次

2 変数の条件付最大・最小問題

例:

$$\varphi(x, y) := x^4 + y^4 - 1 = 0$$

のもとで、

$$f(x, y) := x^3 + 2y^3$$

の最大値、最小値を求めたい。

D: 有界閉領域
$f(x,y)$, $\varphi(x,y)$: $\mathbf{C}^1$-関数

定理 (ラグランジュの未定乗数法、その 1)

λ をパラメータとして、

$$F(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

とおく。条件 $\varphi(x,y) = 0$ のもとで、最大値、最小値をあたえる点 (x,y) は、次の *1., 2., 3.* のどれか

1. D の境界で $\varphi(x,y) = 0$ を満たす点
2. $\varphi_x(x,y) = \varphi_y(x,y) = 0$ *(*曲線 $\varphi(x,y) = 0$ 特異点*)*
3. $F_x(x,y,\lambda) = F_y(x,y,\lambda) = \varphi(x,y) = 0$ の連立方程式の解

2 変数の条件付最大・最小問題 (続)

証明: $f(x,y)$ が (a,b) で、条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで最大値または最小値をとり、境界でも特異点でもないとする。

$\varphi_x(a,b)=\varphi_y(a,b)=0$ にはならないので、$\varphi_y(a,b)\neq 0$ を仮定

陰関数定理 (定理 4.18) より、
$x=a$ の近傍で $\varphi(x,\phi(x))=0,\ b=\phi(a)$ なる $y=\phi(x)$ が存在

$$z=f(x,\phi(x))$$

$$\frac{dz}{dx}(a)=f_x(a,b)+f_y(a,b)\phi'(a)=f_x(a,b)-\frac{\varphi_x(a,b)}{\varphi_y(a,b)}f_y(a,b)$$

境界ではなく、最大または最小になるので、この値は 0 になる。

2 変数の条件付最大・最小問題 (続)

$\varphi_x(a,b) \neq 0$ のとき、

$$\lambda := -\frac{f_x(a,b)}{\varphi_x(a,b)} = -\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}$$

は、$\varphi(a,b) = 0$ 以外に以下を満たす。

$$F_x(a,b,\lambda) = f_x(a,b) - \lambda\varphi_x(a,b) = f_x(a,b) - \frac{f_x(a,b)}{\varphi_x(a,b)}\varphi_x(a,b)$$

$$F_y(a,b,\lambda) = f_y(a,b) - \lambda\varphi_y(a,b) = f_y(a,b) - \frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}\varphi_y(a,b)$$

$\varphi_x(a,b) = 0$ のとき、$f_x(a,b) = 0$ より、$\lambda = -\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}$ とおけば、

$$F_x(a,b,\lambda) = F_y(a,b,\lambda) = \varphi(a,b) = 0$$

2 変数の条件付最大・最小問題 (続)

例に戻る:
$D := \{(x,y) | |x| \le 2, |y| \le 2\}$ の境界で、$\varphi(x,y) \neq 0$
$\varphi_x(x,y) = 4x^3$, $\varphi_y(x,y) = 4y^3$ より、特異点はない。

$$F(x,y) := f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = x^3 + 2y^3 + \lambda(x^4 + y^4 - 1)$$

$$F_x(x,y,\lambda) = 3x^2 + 4\lambda x^3 = 0$$

$$F_y(x,y,\lambda) = 6y^2 + 4\lambda y^3 = 0$$

$$\varphi(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$$

2 変数の条件付最大・最小問題 (続)

$$
\begin{aligned}
(x, y, \lambda) \quad = \quad & (0, 1, -\frac{3}{2}), (0, -1, \frac{3}{2}), (1, 0, -\frac{3}{4}), (-1, 0, \frac{3}{4}), \\
& (-17^{-1/4}, -2 \cdot 17^{-1/4}, \frac{3}{4} \cdot 17^{1/4}), \\
& (17^{-1/4}, 2 \cdot 17^{-1/4}, -\frac{3}{4} \cdot 17^{1/4})
\end{aligned}
$$

$$2, -2, 1, -1, -17^{1/4}, 17^{1/4}$$

最大値 $17^{1/4}$, 最小値 $-17^{1/4}$

一般のラグランジュの未定乗数法

定理 4.22 と演習問題 4-6-1

$$f(x, y)\ ,\ \varphi(x, y)$$

定理 4.23 と演習問題 4-6-2

$$f(x_1, \cdots, x_n)\ ,\ \varphi(x_1, \cdots, x_n)$$

定理 4.24 と演習問題 4-6-3

$$f(x_1, \cdots, x_n)\ ,\ \varphi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_k(x_1, \cdots, x_n)$$