4.5 陰関数定理

鈴木 譲

2009 年 7 月 15 日 (水)

目次

2 変数の陰関数定理

定義 ($f(x,y)$ で定義された陰関数)

各 x についての $f(x,y)$ の解 (一般に複数)

例: $f(x,y) := x^2+y^2-1=0$ $(-1 \le x \le 1)$

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

のそれぞれを陰関数の分枝とよぶ。

$$y = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

$$y = -\sqrt{1-x^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

$$f_x + f_y\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0\ ,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x}{y}$$

2 変数の陰関数定理 (続)

定理 (陰関数定理, その 1)

$f(x,y)$: $\mathbf{C}^1$-関数
$f(a,b)=0,\ f_y(a,b)\neq 0$ のとき、
$x=a$ の近傍で、

$$\begin{cases} f(x,\varphi(x))\equiv 0 \\ \varphi(a)=b \end{cases}$$

なる $\mathbf{C}^1$-関数 φ がただひとつ存在して、

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$$

2 変数の陰関数定理 (続)

例: $f(x, y)$: $\mathbf{C}^1$-関数
曲線 $f(x, y) = 0$ 上の (a, b) での接線の方程式は、
$f_x(a, b)^2 + f_y(a, b)^2 \neq 0$ のとき、

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0$$

実際、$f_y(a, b) \neq 0$ であれば、(a, b) の近傍で $y = \varphi(x)$

$$\varphi'(a) = -f_x(a, b)/f_y(a, b)$$

接線の方程式: $y - b = -\dfrac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}(x - a)$
$f_x(a, b) \neq 0$ であれば、(a, b) の近傍で $x = \phi(y)$

$$\phi'(b) = -f_y(a, b)/f_x(a, b)$$

接線の方程式: $x - a = -\dfrac{f_y(a, b)}{f_x(a, b)}(y - b)$

$n+1$ 変数の陰関数定理

定理 (陰関数定理, その 2)

$f(x_1, \cdots, x_n, y)$: $\mathbf{C}^1$-関数,
$f(a_1, \cdots, a_n, b) = 0$, $f_y(a_1, \cdots, a_n, b) \neq 0$ のとき
$(x_1, \cdots, x_n) = (a_1, \cdots, a_n)$ の近傍で、

$$\begin{cases} f(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n)) \equiv 0 \\ \varphi(a_1, \cdots, a_n) = b \end{cases}$$

なる $\mathbf{C}^1$-関数 φ がただひとつ存在して、各 $i = 1, \cdots, n$ で

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{f_{x_i}(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n))}{f_y(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n))}$$

$n+1$ 変数の陰関数定理 (続)

例: $f(x,y,z)$: $\mathbf{C}^1$-関数
曲線 $f(x,y,z)=0$ 上の (a,b,c) での接線の方程式は、
$f_x(a,b,c)^2+f_y(a,b,c)^2+f_z(a,b,c)^2\neq 0$ のとき、

$$f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,v)(z-c)=0$$

実際、$f_z(a,b,c)\neq 0$ であれば、(a,b,c) の近傍で $z=\varphi(x,y)$

$$\varphi_x(a,b)=-f_x(a,b,c)/f_z(a,b,c)$$

$$\varphi_y(a,b)=-f_y(a,b,c)/f_z(a,b,c)$$

$z-c=\varphi_x(a,b)(x-a)+\varphi_y(a,b)(y-b)$ (p.146) より、
接線の方程式: $z-c=-\dfrac{f_x(a,b,c)}{f_z(a,b,c)}(x-a)-\dfrac{f_y(a,b,c)}{f_z(a,b,c)}(y-a)$
$f_x(a,b,c)\neq 0, f_y(a,b,c)\neq 0$ のときも同様。

一般の陰関数定理

定理 (陰関数定理, その 2)

$f_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_p)$, $i = 1, \cdots, p$: $\mathbf{C}^1$-関数,
$P = (a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_p)$, $f_i(P) = 0$, $i = 1, \cdots, p$
$\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}|_P$ を (i, j)-成分とする正方行列の行列式が 0 でないとき、
$(x_1, \cdots, x_n) = (a_1, \cdots, a_n)$ の近傍で、

$$\begin{cases} f_i(x_1, \cdots, x_n, \varphi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_p(x_1, \cdots, x_n)) \equiv 0 \\ \varphi_i(a_1, \cdots, a_n) = b_i \end{cases}$$

なる $\mathbf{C}^1$-関数 φ がただひとつ存在して、$d\varphi_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j$ は

連立方程式 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} dx_j + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial y_i} d\varphi_i = 0$, $k = 1, \cdots, p$ の解

一般の陰関数定理 (続)

定義

全微分 $z=f(x,y)$ について、x の増分が dx, y の増分が dz のとき、$dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$

W: $\mathbb{R}^n$ の領域

$F: W \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{C}^1$-写像 $(x_1,\cdots,x_n) \mapsto (y_1,\cdots,y_n)$

定義 (F のヤコビアン J_F)

F のヤコビ行列 dF の行列式

$$dF=\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad J_F=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

逆写像定理

W: $\mathbb{R}^n$ の領域
$F : W \to \mathbb{R}^n$: $\mathbf{C}^1$-写像

定理 (逆写像定理)

$P \in W$ で $J_F(P) \neq 0$ のとき、
$P \in U$, $F(P) \in V$ なる領域 U, V が存在して、

1. $F : U \to V$ は、*1* 対 *1*
2. $F^{-1} : V \to U$ は、$\mathbf{C}^1$-写像

$d(F^{-1}) = (dF)^{-1}$

逆写像定理 (続)

例: $x := u^2 - v^2$, $y := uv$, $z := u^2 + v^2$ $((u,v) \neq (0,0))$ のとき、

$$dF = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2u & -2v \\ v & u \end{array}\right]$$

$J_F = 2(u^2 + v^2) \neq 0$ と逆写像定理より、$u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right] = d(F^{-1}) = (dF)^{-1} = \frac{1}{2(u^2+v^2)} \left[\begin{array}{cc} u & 2v \\ -v & 2u \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{array}\right] = [\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right]$$

$$= \quad [2u, 2v] \frac{1}{2(u^2+v^2)} \left[\begin{array}{cc} u & 2v \\ -v & 2u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{u^2 - v^2}{u^2+v^2} & \frac{4uv}{u^2+v^2} \end{array}\right]$$