4.4 極値と最大、最小問題

鈴木 譲

2009 年 7 月 8 日 (水)

目次

極値

定義 ($f(x_1, \cdots, x_n)$ が $P(a_1, \cdots, a_n)$ で極大)

$$0 < PQ < \delta \Longrightarrow f(Q) < f(P)$$

なる $\delta > 0$ が存在。$f(P)$ を極大値という。

極小、極小値も同様。極大値、極小値をあわせて極値とよぶ。

2 変数の場合

定理

$\mathbf{C}^1$-関数 $f(x,y)$ が (a,b) で極値をとれば、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

逆は成立しない

例: $f(x,y) := x^2 - y^2$、$f_x(0,0) = f_y(0,0)$、極値をとらない。
$(x,y,z) = (0,0,0)$ は、峠の点

- 直線 $x = a$ 上では極大
- 直線 $y = b$ 上では極小

2 変数の場合 (続)

定理

C^2-関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ のとき、
$A := f_{xy}(a,b),\ B := f_{xy}(a,b) = f_{xy}(a,b),\ C := f_{yy}(a,b)$

1. $A>0, B^2-AC<0 \Longrightarrow f(x,y)$ は (a,b) で極小
2. $A<0, B^2-AC<0 \Longrightarrow f(x,y)$ は (a,b) で極大
3. $B^2-AC>0 \Longrightarrow f(x,y)$ は $(a,b,f(a,b))$ で峠の点

例: $f(x,y) := x^4 - xy + y^4$,

$$f_x(x,y) = 4x^3 - y = 0, f_y(x,y) = 4y^3 - x = 0$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2, f_{xy}(x,y) = -1, f_{yy}(x,y) = 12y^2$$

$(0,0) \Longrightarrow B^2 - AC = 1 > 0 \Longrightarrow$ 峠の点
$(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \Longrightarrow A = 3 > 0, B^2 - AC = -8 < 0 \Longrightarrow$ 極小

n 多変数の場合

定義 (n 次正方行列 A の固有値)

$\det(A - \lambda E) = 0$(固有方程式) の解

A が対称行列 $\Longrightarrow$ 固有値がすべて実数

定理

$f(x_1, \cdots, x_n)$: $\mathbf{C}^2$-関数

$P(a_1, \cdots, a_n)$ で $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$

n 次対称行列 $[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)]$ の固有値が

1. すべて正 $\Longrightarrow$ $f(x_1, \cdots, x_n)$ は P で極小
2. すべて負 $\Longrightarrow$ $f(x_1, \cdots, x_n)$ は P で極大
3. 正負が混在 $\Longrightarrow$ $(P, f(x_1, \cdots, x_n))$ がグラフの峠の点

n 多変数の場合 (続)

$n=2$ のとき、固有方程式

$$(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2)=0$$

の解 λ_1, λ_2 について、

1. $A>0, B^2-AC<0 \Longrightarrow C>B^2/A>0 \Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2>0$
2. $A<0, B^2-AC<0 \Longrightarrow C<B^2/A>0 \Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2<0$
3. $B^2-AC>0 \Longrightarrow \lambda_1>0, \lambda_2<0$ または $\lambda_1<0, \lambda_2>0$

最大値・最小値

閉領域 D で連続な関数は、最大値、最小値をもち、

1. D の境界の点
2. $f_x(P) = f_y(P) = 0$

のいずれかになっている。

最大値・最小値 (続)

例: x, y, z が三角形の 3 辺の長さ $\iff 0 < x < y + z$, $0 < y < z + x$, $0 < z < x + y$

$$a := (x + y + z)/2$$

$$S := \sqrt{a(a - x)(a - y)(a - z)}$$

$$z = 2a - x - y$$

$$f(x, y) := (a - x)(a - y)(x + y - a)$$

$$D := \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, x + y \leq a\}$$

境界で $f(x, y) := 0 \Longrightarrow f(x, y)$ は閉領域 D での連続関数

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (a - y)(2a - 2x - y) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = (a - x)(2a - x - 2y)$$

を解いて、$x = y = \frac{2}{3}a$ が最大値を与える。