4.3 連鎖律

鈴木 譲

2009 年 7 月 1 日 (水)

目次

1 変数の連鎖律

$z = f(x, y)$: 2 変数の $\mathbf{C}^1$-関数
$x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$: 1 変数の $\mathbf{C}^1$-関数

定理

$z = f(\varphi(t), \phi(t))$ は、*1 変数の* $\mathbf{C}^1$-関数で

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

証明: $a = \varphi(c)$, $b = \phi(c)$ として、
$x = \varphi(t), y = \phi(t)$ は、$t = c$ の近傍で微分可能

$$\varphi(t) - a = \varphi'(c)(t - c) + A(t)(t - c)$$

$$\phi(t) - b = \phi'(c)(t - c) + B(t)(t - c)$$

1 変数の連鎖律 (続)

$f(x,y)$ も、$(x,y)=(a,b)$ の近傍で全微分可能なので、

$$\rho(x,y) := \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$f(x,y) = f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+\rho(x,y)C(x,y)$$

かつ $C(a,b)=0$ なる (a,b) で連続な $C(x,y)$ が存在する

$$\begin{aligned} f(\varphi(t),\phi(t)) = f(a,b) + (t-c)\{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\varphi'(c) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\phi'(c)\} \\ +(t-c)\{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)A(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)B(t) + C(\varphi(t),\phi(t))\} \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt}(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\varphi'(c) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\phi'(c)$$

定理の右辺が連続関数なので、$z=f(\varphi(t),\phi(t))$ も $\mathbf{C}^1$-関数

2 変数の連鎖律

$z = f(x, y)$: 2 変数の $\mathbf{C}^1$-関数
$x = \varphi(u, v)$, $y = \phi(u, v)$: 2 変数の $\mathbf{C}^1$-関数

定理

$z = f(\varphi(u, v), \phi(u, v))$ は、*2* 変数の $\mathbf{C}^1$-関数で

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{du}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dv} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dv}$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial z}{\partial v}\right] = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial z}{\partial y}\right] \begin{bmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{bmatrix}$$

C^k-写像

$m, n \geq 1$
$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像)
W: $\mathbb{R}^n$ の領域
$F : W \to \mathbb{R}^m$ (W から $\mathbb{R}^m$ への写像)

$$\begin{aligned} F(x_1, \cdots, x_n) &= (y_1, \cdots, y_m) \\ &= (y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m(x_1, \cdots, x_n)) \end{aligned}$$

定義 (F が C^k-写像)

各 $y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m(x_1, \cdots, x_n)$ が C^k-関数

C^k-写像

$F : W \to \mathbb{R}^m$

$F^{-1}(V) := \{(x_1, \cdots, x_n) \in W | F(x_1, \cdots, x_n) \in V\}$

定理

F が連続写像 ($\mathbf{C}^0$-写像) であることと、$\mathbb{R}^m$ の任意の開集合 V の $F^{-1}(V)$ が W の開集合となることは同値

証明:

1. 任意の開集合 V について $F^{-1}(V)$ が開集合であれば、
   V を $P \in \mathbb{R}^m$ の任意の ϵ-近傍 ($\epsilon > 0$) として、
   $F^{-1}(P)$ の δ-近傍 ($\delta > 0$) が存在。
   $\Longrightarrow$ 連続
2. ある開集合 V について $F^{-1}(V)$ が開集合でなければ、
   $F^{-1}(P)$ がその $F^{-1}(V)$ の境界にある $P \in \mathbb{R}^m$ が存在。
   (P と V の点との距離の上限を $\epsilon > 0$ とする)
   $\Longrightarrow$ 連続ではない

一般の連鎖律

F: C^1-写像

定義 (F のヤコビ行列)

$$dF := \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

定義 (W 上のベクトル場 (グラディアント) df, grad f)

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

V: $\mathbb{R}^m$ の領域
$G: V \to \mathbb{R}^l$
$F(W) := \{F(P) | P \in W\} \subseteq V$ のとき、$G \circ F : W \to \mathbb{R}^l$ が定義:

$$G \circ F : P \mapsto G(F(P))$$

一般の連鎖律 (続)

定理

F, G が $\mathbf{C}^1$-写像であれば、$G \circ F$ も $\mathbf{C}^1$-写像で、

$$d(G \circ F) = (dG)(dF)$$

(右辺は行列の積)

2 次元の極座標変換

$$\Phi : (r, \theta) \mapsto (x, y)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

3 次元の極座標変換

$$\Phi : (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{cases}$$

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

2 変数平均値の定理

$f(x,y)$: $\mathbf{C}^1$-関数
(a,b): 定義域に含まれる

定理 (2 変数の平均値の定理)

$(0,0)$ の近傍の各点 (s,t) に対して

$$f(a+s,b+t)=f(a,b)+sf_x(a+\theta s,b+\theta t)+tf_y(a+\theta s,b+\theta t)$$

を満足する $0<\theta<1$ が存在する

証明: (s,t) を固定し、$g(u):=f(a+su,b+tu)$ に平均値の定理

2 変数平均値の定理の系

系

領域 D 上の $\mathbf{C}^1$-関数 $f(x,y)$ が恒等的に $f_x = f_y = 0$ であれば、$f(x,y)$ は定数

証明: $P=(a,b)$ を D より任意にとると、
定理より、(a,b) の近傍の各点 (x,y) で

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + (x-a)f_x(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)) \\ &\quad + (y-b)f_y(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)) = f(a,b) \end{aligned}$$

$Q=(c,d)$ を D より任意にとると、
曲線の近傍どうし $f(x,y)$ が一定で、$f(a,b)=f(c,d)$

2 変数テイラーの定理

$f(x,y)$: $\mathbf{C}^n$-関数
(a,b): 定義域に含まれる

定理 (2 変数のテイラーの定理)

$(0,0)$ の近傍の各点 (s,t) に対して

$$\begin{aligned} & f(a+s,b+t) \\ = \ & f(a,b)+\frac{1}{1!}(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\frac{1}{2!}(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})^2 f(a,b) \\ & +\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})^{n-1}f(a,b) \\ & +\frac{1}{n!}(s\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial y})^n f(a+\theta s,b+\theta t) \end{aligned}$$

を満足する $0<\theta<1$ が存在する

証明: (s,t) を固定し、$g(u):=f(a+su,b+tu)$ にテイラーの定理