

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

4.3 連鎖律

鈴木 譲

2009年7月1日(水)

目次

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

① 連鎖律

② 平均値の定理

③ テイラーの定理

1 変数の連鎖律

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

$z = f(x, y)$: 2 変数の C^1 -関数

$x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$: 1 変数の C^1 -関数

定理

$z = f(\varphi(t), \phi(t))$ は、1 変数の C^1 -関数で

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

証明: $a = \varphi(c)$, $b = \phi(c)$ として、

$x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ は、 $t = c$ の近傍で微分可能

$$\varphi(t) - a = \varphi'(c)(t - c) + A(t)(t - c)$$

$$\phi(t) - b = \phi'(c)(t - c) + B(t)(t - c)$$

1 変数の連鎖律 (続)

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

$f(x, y)$ も、 $(x, y) = (a, b)$ の近傍で全微分可能なので、

$$\rho(x, y) := \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \rho(x, y)C(x, y)$$

かつ $C(a, b) = 0$ なる (a, b) で連続な $C(x, y)$ が存在する

$$\begin{aligned} f(\varphi(t), \phi(t)) &= f(a, b) + (t - c) \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\varphi'(c) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\phi'(c) \right\} \\ &\quad + (t - c) \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)A(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)B(t) + C(\varphi(t), \phi(t)) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt}(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\varphi'(c) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\phi'(c)$$

定理の右辺が連続関数なので、 $z = f(\varphi(t), \phi(t))$ も C^1 -関数

2変数の連鎖律

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

$z = f(x, y)$: 2変数の C^1 -関数

$x = \varphi(u, v)$, $y = \phi(u, v)$: 2変数の C^1 -関数

定理

$z = f(\varphi(u, v), \phi(u, v))$ は、2変数の C^1 -関数で

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{du}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dv}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{bmatrix}$$

$$m, n \geq 1$$

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (\mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への写像)

$W: \mathbb{R}^n$ の領域

$F: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ (W から \mathbb{R}^m への写像)

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= (y_1, \dots, y_m) \\ &= (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

定義 (F が C^k -写像)

各 $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)$ が C^k -関数

$$F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$F^{-1}(V) := \{(x_1, \dots, x_n) \in W \mid F(x_1, \dots, x_n) \in V\}$$

定理

F が連続写像 (C^0 -写像) であることと、 \mathbb{R}^m の任意の開集合 V の $F^{-1}(V)$ が W の開集合となることは同値

証明:

- ① 任意の開集合 V について $F^{-1}(V)$ が開集合であれば、 V を $P \in \mathbb{R}^m$ の任意の ϵ -近傍 ($\epsilon > 0$) として、 $F^{-1}(P)$ の δ -近傍 ($\delta > 0$) が存在。
 \implies 連続
- ② ある開集合 V について $F^{-1}(V)$ が開集合でなければ、 $F^{-1}(P)$ がその $F^{-1}(V)$ の境界にある $P \in \mathbb{R}^m$ が存在。
(P と V の点との距離の上限を $\epsilon > 0$ とする)
 \implies 連続ではない

一般の連鎖律

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

$F: C^1$ -写像

定義 (F のヤコビ行列)

$$dF := \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

定義 (W 上のベクトル場 (グラディエント) $df, \text{grad } f$)

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

$V: \mathbb{R}^m$ の領域

$G: V \rightarrow \mathbb{R}^l$

$F(W) := \{F(P) | P \in W\} \subseteq V$ のとき、 $G \circ F: W \rightarrow \mathbb{R}^l$ が定義:

$$G \circ F: P \mapsto G(F(P))$$

一般の連鎖律 (続)

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

定理

F, G が C^1 -写像であれば、 $G \circ F$ も C^1 -写像で、

$$d(G \circ F) = (dG)(dF)$$

(右辺は行列の積)

2次元の極座標変換

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

$$\Phi : (r, \theta) \mapsto (x, y)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

3次元の極座標変換

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

$$\Phi : (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

2変数平均値の定理

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

$f(x, y)$: C^1 -関数
 (a, b) : 定義域に含まれる

定理 (2変数の平均値の定理)

$(0, 0)$ の近傍の各点 (s, t) に対して

$$f(a + s, b + t) = f(a, b) + sf_x(a + \theta s, b + \theta t) + tf_y(a + \theta s, b + \theta t)$$

を満足する $0 < \theta < 1$ が存在する

証明: (s, t) を固定し、 $g(u) := f(a + su, b + tu)$ に平均値の定理

2 変数平均値の定理の系

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

系

領域 D 上の C^1 -関数 $f(x, y)$ が恒等的に $f_x = f_y = 0$ であれば、 $f(x, y)$ は定数

証明: $P = (a, b)$ を D より任意にとると、
定理より、 (a, b) の近傍の各点 (x, y) で

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + (x - a)f_x(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b)) \\ &\quad + (y - b)f_y(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b)) = f(a, b) \end{aligned}$$

$Q = (c, d)$ を D より任意にとると、
曲線の近傍どうし $f(x, y)$ が一定で、 $f(a, b) = f(c, d)$

2変数テイラーの定理

4.3 連鎖律

鈴木 譲

目次

連鎖律

平均値の
定理

テイラーの
定理

$f(x, y)$: \mathbf{C}^n -関数
 (a, b) : 定義域に含まれる

定理 (2変数のテイラーの定理)

$(0, 0)$ の近傍の各点 (s, t) に対して

$$\begin{aligned} & f(a + s, b + t) \\ = & f(a, b) + \frac{1}{1!} \left(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) + \frac{1}{2!} \left(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) \\ & + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \left(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(a, b) \\ & + \frac{1}{n!} \left(s \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta s, b + \theta t) \end{aligned}$$

を満足する $0 < \theta < 1$ が存在する

証明: (s, t) を固定し、 $g(u) := f(a + su, b + tu)$ にテイラーの定理