4.2 偏微分と全微分

鈴木 譲

2009 年 6 月 24 日 (水)

目次

偏微分

$(a, b) \in D$
$z = f(x, y)$: D 上の関数

定義 (f が (a, b) で x に関して偏微分可能)

$f(x, b)$ が $x = a$ で微分可能

その微分係数を (a, b) での x に関する偏微分係数とよぶ

定義 (x に関する偏導関数)

(x, y) での x に関する偏微分係数

y に関する偏導関数も同様に定義

$$f_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), f_y(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$$

(例) $f(x, y) = x^2 - y^2 \Longrightarrow f_x(x, y) = 2x, f_y(x, y) = -2y$

第 2 次導関数

f_x, f_y がともに連続であるとき、f は $\mathbf{C}^1$ 級という。
$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ がさらに x, y の両方で偏微分可能であり、

$$f_{xx}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y)$$

$$f_{xy}(x,y) := \frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y)$$

$$f_{yx}(x,y) := \frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y)$$

$$f_{xy}(x,y) := \frac{\partial f_y}{\partial y}(x,y)$$

(**第 2 次導関数**) がすべて連続であるとき、f は $\mathbf{C}^2$ 級という。

第 2 次導関数 (続)

$f(x,y) := x^3 + 2x^2y - xy^2 - y^3$ のとき

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 4xy - y^2, f_y(x,y) = 2x^2 - 2xy - 3y^2$$

$$f_{xx}(x,y) = 6x + 4y, f_{xy}(x,y) = 4x - 2y,$$

$$f_{yx}(x,y) = 4x - 2y, f_{yy}(x,y) = -2x - 6y$$

$f(x,y) := \log(x^2 + 3y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$ のとき

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+3y^2}, f_y(x,y) = \frac{6y}{x^2+3y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{6y^2 - 2x^2}{(x^2+3y^2)^2}, f_{xy}(x,y) = \frac{-12xy}{(x^2+3y^2)^2}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{-12xy}{(x^2+3y^2)^2}, f_{yy}(x,y) = \frac{6x^2 - 18y^2}{(x^2+3y^2)^2}$$

第 2 次導関数 (続)

定理

f が $\mathbf{C}^2$ であれば、$f_{xy} = f_{yx}$

証明: 次ページ

第 2 次導関数 (続)

$$F := f(a+s,b+t)-f(a,b+t)-f(a+s,b)+f(a,b)$$

$$g(y) := f(a+s,y)-f(a,y)$$

$F = g(b+t)-g(b)$ に平均値の定理
$F = tg'(b+\theta t)$ なる $0<\theta<1$ が存在
$g'(b+\theta t) = f_y(a+s,b+\theta t)-f_y(a,b+\theta t)$ に平均値の定理
$g'(b+\theta t) = sf_{yx}(a+\theta' s,b+\theta t)$ なる $0<\theta'<1$ が存在
$F = stf_{yx}(a+\theta' s,b+\theta t)$
x,y をいれかえると、
$F = stf_{xy}(a+\theta''' s,b+\theta'' t)$ なる $0<\theta'',\theta'''<1$ が存在
$f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ の連続性より、

$$f_{xy}(a,b) = \lim_{(s,t)\to(0,0),s\neq 0,t\neq 0}\frac{F}{st} = f_{xy}(a,b)$$

偏微分可能でも連続であるとは限らない

高次 (n 次) 偏導関数、**C**^{n}-関数、**C**$^\infty$-関数などの定義も同様

偏微分可能でも連続であるとは限らない

(例)

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

$$x \neq 0 \Longrightarrow f(x,x) = \frac{1}{2} \not\to 0 (x \to 0)$$

全微分可能

定義 ($z = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + (x-a)A + (y-b)B \\ &\quad + C(x,y)\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \end{aligned}$$

を満足する定数 A, B と、(a, b) の近傍で定義、(a, b) で連続、$C(a, b) = 0$ となる関数 $C(x, y)$ が存在

定理

$f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能のとき

1. $f(x, y)$ は (a, b) で連続
2. $f(x, y)$ は (a, b) で x, y の両方で偏微分可能
3. $A = f_x(a, b),\ B = f_y(a, b)$

接平面

$f(x,y)$ は、(a,b) の近傍では、
$f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)B$ に近い

$$z-f(a,b)=f_x(x,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

を $(a,b,f(a,b))$ での $z=f(x,y)$ の**接平面**とよぶ

(例) $z=f(x,y)=x^2+y^2$ のとき

$$z-5=2(x-1)+4(y-2)$$

定理

$f(x,y)$ が $\mathbf{C}^1$-関数であれば、全微分可能

「C^1-関数なら、全微分可能」の証明

平均値の定理より、$0 < \theta, \theta' < 1$ が存在し、

$$f(a+s, b+t) - f(a, b+t) = sf_x(a+\theta s, b+t)$$

$$f(a, b+t) - f(a, b) = tf_y(a, b+\theta' t)$$

f_x, f_y の連続性より、$(s, t) \to (0, 0)$ で

$$u(s,t) := f_x(a+\theta s, b+t) - f_x(a, b) \to 0$$

$$v(s,t) := f_y(a, b+\theta' t) - f_y(a, b) \to 0$$

$$C(x,y) := \frac{(x-a)u(x-a, y-b) + (y-b)v(x-a, y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

$(x,y) \neq (a,b)$, $C(a,b) := 0$ は (a,b) で連続より、

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)A + (y-b)B + C(x,y)\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$