

4.2 偏微分と全微分

鈴木 譲

2009 年 6 月 24 日 (水)

目次

4.2 偏微分
と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第 2 次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

① 偏微分

② 第 2 次導関数

③ 偏微分可能でも連続であるとは限らない

④ 全微分可能

偏微分

4.2 偏微分
と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第 2 次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

$$(a, b) \in D$$

$z = f(x, y)$: D 上の関数

定義 (f が (a, b) で x に関して偏微分可能)

$f(x, b)$ が $x = a$ で微分可能

その微分係数を (a, b) での x に関する偏微分係数とよぶ

定義 (x に関する偏導関数)

(x, y) での x に関する偏微分係数

y に関する偏導関数も同様に定義

$$f_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), f_y(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$$

(例) $f(x, y) = x^2 - y^2 \implies f_x(x, y) = 2x, f_y(x, y) = -2y$

第2次導関数

4.2 偏微分
と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第2次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

f_x, f_y がともに連続であるとき、 f は C^1 級という。
 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ がさらに x, y の両方で偏微分可能であり、

$$f_{xx}(x, y) := \frac{\partial f_x}{\partial x}(x, y)$$

$$f_{xy}(x, y) := \frac{\partial f_x}{\partial y}(x, y)$$

$$f_{yx}(x, y) := \frac{\partial f_y}{\partial x}(x, y)$$

$$f_{xy}(x, y) := \frac{\partial f_y}{\partial y}(x, y)$$

(第2次導関数) がすべて連続であるとき、 f は C^2 級という。

第2次導関数 (続)

4.2 偏微分
と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第2次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

$f(x, y) := x^3 + 2x^2y - xy^2 - y^3$ のとき

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 4xy - y^2, f_y(x, y) = 2x^2 - 2xy - 3y^2$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 4y, f_{xy}(x, y) = 4x - 2y,$$

$$f_{yx}(x, y) = 4x - 2y, f_{yy}(x, y) = -2x - 6y$$

$f(x, y) := \log(x^2 + 3y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + 3y^2}, f_y(x, y) = \frac{6y}{x^2 + 3y^2}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{6y^2 - 2x^2}{(x^2 + 3y^2)^2}, f_{xy}(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + 3y^2)^2}$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + 3y^2)^2}, f_{yy}(x, y) = \frac{6x^2 - 18y^2}{(x^2 + 3y^2)^2}$$

第 2 次導関数 (続)

4.2 偏微分
と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第 2 次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

定理

f が C^2 であれば、 $f_{xy} = f_{yx}$

証明: 次ページ

第2次導関数 (続)

4.2 偏微分
と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第2次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

$$F := f(a+s, b+t) - f(a, b+t) - f(a+s, b) + f(a, b)$$

$$g(y) := f(a+s, y) - f(a, y)$$

$F = g(b+t) - g(b)$ に平均値の定理

$F = tg'(b+\theta t)$ なる $0 < \theta < 1$ が存在

$g'(b+\theta t) = f_y(a+s, b+\theta t) - f_y(a, b+\theta t)$ に平均値の定理

$g'(b+\theta t) = sf_{yx}(a+\theta's, b+\theta t)$ なる $0 < \theta' < 1$ が存在

$$F = stf_{yx}(a+\theta's, b+\theta t)$$

x, y をいれかえると、

$F = stf_{xy}(a+\theta'''s, b+\theta''t)$ なる $0 < \theta'', \theta''' < 1$ が存在

$f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$ の連続性より、

$$f_{xy}(a, b) = \lim_{(s,t) \rightarrow (0,0), s \neq 0, t \neq 0} \frac{F}{st} = f_{xy}(a, b)$$

偏微分可能でも連続であるとは限らない

4.2 偏微分
と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第 2 次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

高次 (n 次) 偏導関数、 C^n -関数、 C^∞ -関数などの定義も同様

偏微分可能でも連続であるとは限らない

(例)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

$$x \neq 0 \implies f(x, x) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$$

全微分可能

4.2 偏微分 と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第 2 次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

定義 ($z = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能)

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a)A + (y - b)B \\ + C(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

を満足する定数 A, B と、 (a, b) の近傍で定義、 (a, b) で連続、 $C(a, b) = 0$ となる関数 $C(x, y)$ が存在

定理

$f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能のとき

- ① $f(x, y)$ は (a, b) で連続
- ② $f(x, y)$ は (a, b) で x, y の両方で偏微分可能
- ③ $A = f_x(a, b), B = f_y(a, b)$

接平面

4.2 偏微分
と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第 2 次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

$f(x, y)$ は、 (a, b) の近傍では、
 $f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ に近い

$$z - f(a, b) = f_x(x, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

を $(a, b, f(a, b))$ での $z = f(x, y)$ の接平面とよぶ

(例) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ のとき

$$z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

定理

$f(x, y)$ が C^1 -関数であれば、全微分可能

「 C^1 -関数なら、全微分可能」の証明

4.2 偏微分
と全微分

鈴木 譲

目次

偏微分

第 2 次導
関数

偏微分可能
でも連続で
あるとは限
らない

全微分可能

平均値の定理より、 $0 < \theta, \theta' < 1$ が存在し、

$$f(a + s, b + t) - f(a, b + t) = sf_x(a + \theta s, b + t)$$

$$f(a, b + t) - f(a, b) = tf_y(a, b + \theta' t)$$

f_x, f_y の連続性より、 $(s, t) \rightarrow (0, 0)$ で

$$u(s, t) := f_x(a + \theta s, b + t) - f_x(a, b) \rightarrow 0$$

$$v(s, t) := f_y(a, b + \theta' t) - f_y(a, b) \rightarrow 0$$

$$C(x, y) := \frac{(x - a)u(x - a, y - b) + (y - b)v(x - a, y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}}$$

$(x, y) \neq (a, b)$, $C(a, b) := 0$ は (a, b) で連続より、

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a)A + (y - b)B + C(x, y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$