

4.1 多変数
関数

鈴木 譲

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ボルツア
ノワイヤ
シュトラースの定理

有界閉領域
上の連続
関数

4.1 多変数関数

鈴木 譲

2009年6月24日(水)

目次

4.1 多変数
関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の
極限

領域

点列

ボルツア
ノ-ワイヤ
シュトラースの定理

有界閉領域
上の連続
関数

- 1 多変数関数
- 2 多変数関数の極限
- 3 領域
- 4 点列
- 5 ボルツアノ-ワイヤシュトラースの定理
- 6 有界閉領域上の連続関数

多変数関数

4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ポルツァ
ノワイヤ
シュトラースの定理

有界閉領域上の連続関数

定義 (2 変数関数 $z = f(x, y)$)

平面上の各点 (x, y) に数 z をある規則で対応させる写像

$$z = x^2 - y^2$$

$$z = x^4 - xy + y^4$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$$

$$z = \log(x^2 + y^2), (x, y) \neq (0, 0)$$

$x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)$ などを**定義域**という

定義 (関数のグラフ)

空間の点 $(x, y, f(x, y))$ の集合 (曲面をあらわす)

n 変数 (多変数) 関数 $z = f(x_1, \dots, x_n)$

同様の議論が成立

多変数関数の極限

4.1 多変数関数

鈴木 譲

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ボルツァ
ノワイヤ
シュトラースの定理

有界閉領域
上の連続
関数

$$P = (x, y), Q = (a, b)$$

$$PQ := \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

定義 ($P \rightarrow Q$)

$$PQ \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow x \rightarrow a, y \rightarrow b)$$

$$|x - a|, |y - b| \leq PQ \leq |x - a| + |y - b|$$

多変数関数の極限 (続)

4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ボルツァ
ノワイヤ
シュトラースの定理

有界閉領域
上の連続
関数

定義 ($f(P) \rightarrow A (P \rightarrow Q)$)

$$PQ < \delta(\epsilon) \implies |f(P) - A| < \epsilon$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在

2次元になると、 $P \rightarrow Q$ に様々な経路が存在

右極限、左極限だけではなく、360度からの近づけ方が存在

定義 ($f(P)$ が Q で連続)

$$P \rightarrow Q \implies f(P) \rightarrow f(Q)$$

領域

4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ポルツァ
ノワイヤ
シュトラースの定理

有界閉領域上の連続関数

D : 平面上の点集合

定義 (D が開集合)

D の各点 Q の δ -近傍 $\{P = (x, y) | PQ < \delta\}$ が D に含まれる

定義 ((開) 領域)

- ① D が開集合
- ② D の任意の 2 点が D に含まれる曲線で結べる

定義 (閉領域)

領域とその境界のすべてをあわせた集合

定義 (半開領域)

領域とその境界の一部をあわせた集合

点列

4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ポルツァ
ノワイヤ
シュトラースの定理

有界閉領域
上の連続
関数

点列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, $P_n = (x_n, y_n)$
 $P_0 = (x_0, y_0)$

定義 ($P_n \rightarrow P_0$ ($n \rightarrow \infty$))

$P_0 P_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)
($\iff x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ ($n \rightarrow \infty$))

定義 (領域 D が有界)

$$D \subseteq \{(x, y) | x^2 + y^2 < R^2\}$$

なる $R > 0$ が存在

定義 (点列 $\{P_n\}$ が有界)

領域 $D = \{P_n | n = 1, 2, \dots\}$ が有界

ボルツァノ-ワイヤシュトラースの定理

4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ボルツァノ-ワイヤシュトラースの定理

有界閉領域上の連続関数

定理 (ボルツァノ-ワイヤシュトラースの定理)

有界な無限集合の互いに異なる点からなる点列で、ある点に収束するものが存在する

系

有界な点列は収束する部分列を含む

有界閉領域上の連続関数

4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ポルツァ
ノワイヤ
シュトラースの定理

有界閉領域
上の連続
関数

$f(x, y)$: 有界閉領域 D 上の連続関数

定理 (最大値・最小値の存在)

$f(P_0) \leq f(P) \leq f(Q_0), P \in D$ なる $P_0, Q_0 \in D$ が存在

定理

f の値域は、 $[f(P_0), f(Q_0)]$

定理 (中間値の定理)

$f(P) < f(Q)$ なる $P, Q \in D$ について、
 $f(P) < c < f(Q) \implies c = f(R)$ なる $R \in D$ が存在

定理 (一様連続性)

$$PQ < \delta(\epsilon) \implies |f(P) - f(Q)| < \epsilon$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在