4.1 多変数関数

鈴木 譲

2009 年 6 月 24 日 (水)

目次

多変数関数

定義 (2 変数関数 $z = f(x, y)$)

平面上の各点 (x, y) に数 z をある規則で対応させる写像

$$z = x^2 - y^2$$
$$z = x^4 - xy + y^4$$
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \le 1$$
$$z = \log(x^2 + y^2), (x, y) \ne (0, 0)$$

$x^2 + y^2 \le 1$, $(x, y) \ne (0, 0)$ などを**定義域**という

定義 (関数のグラフ)

空間の点 $(x, y, f(x, y))$ の集合 (曲面をあらわす)

n 変数 (多変数) 関数 $z = f(x_1, \cdots, x_n)$

同様の議論が成立

多変数関数の極限

$$P = (x, y),\ Q = (a, b)$$

$$PQ := \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

定義 $(P \to Q)$

$PQ \to 0\ (\Longleftrightarrow x \to a, y \to b)$

$$|x-a|, |y-b| \le PQ \le |x-a| + |y-b|$$

多変数関数の極限 (続)

定義 ($f(P) \to A$ ($P \to Q$))

$$PQ < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |f(P) - A| < \epsilon$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在

2 次元になると、$P \to Q$ に様々な経路が存在

右極限、左極限だけではなく、360 度からの近づけ方が存在

定義 ($f(P)$ が Q で連続)

$P \to Q \Longrightarrow f(P) \to f(Q)$

領域

D: 平面上の点集合

定義 (D が開集合)

D の各点 Q の δ-近傍 $\{P = (x, y) | PQ < \delta\}$ が D に含まれる

定義 ((開) 領域)

1. D が開集合
2. D の任意の 2 点が D に含まれる曲線で結べる

定義 (閉領域)

領域とその境界のすべてをあわせた集合

定義 (半開領域)

領域とその境界の一部をあわせた集合

点列

点列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, $P_n = (x_n, y_n)$
$P_0 = (x_0, y_0)$

定義 ($P_n \to P_0 \ (n \to \infty)$)

$P_0P_n \to 0 \ (n \to \infty)$
$(\iff x_n \to x_0, y_n \to y_0 \ (n \to \infty))$

定義 (領域 D が有界)

$$D \subseteq \{(x, y) | x^2 + y^2 < R^2\}$$

なる $R > 0$ が存在

定義 (点列 $\{P_n\}$ が有界)

領域 $D = \{P_n | n = 1, 2, \cdots\}$ が有界

ボルツァノ-ワイヤシュトラースの定理

定理 (ボルツァノ-ワイヤシュトラースの定理)

有界な無限集合の互いに異なる点からなる点列で、
ある点に収束するものが存在する

系

有界な点列は収束する部分列を含む

有界閉領域上の連続関数

$f(x, y)$: 有界閉領域 D 上の連続関数

定理 (最大値・最小値の存在)

$f(P_0) \le f(P) \le f(Q_0), P \in D$ なる $P_0, Q_0 \in D$ が存在

定理

f の値域は、$[f(P_0), f(Q_0)]$

定理 (中間値の定理)

$f(P) < f(Q)$ なる $P, Q \in D$ について、
$f(P) < c < f(Q) \Longrightarrow c = f(R)$ なる $R \in D$ が存在

定理 (一様連続性)

$$PQ < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |f(P) - f(Q)| < \epsilon$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在