

4.1 多変数  
関数

鈴木 譲

目次

多変数関数

多変数関数  
の極限

領域

点列

ボルツア  
ノワイヤ  
シュトラース  
の定理

有界閉領域  
上の連続  
関数

## 4.1 多変数関数

鈴木 譲

2009年6月24日(水)

# 目次

4.1 多変数関数

鈴木 譲

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ボルツア  
ノ-ワイヤ  
シュトラースの定理

有界閉領域  
上の連続  
関数

- 1 多変数関数
- 2 多変数関数の極限
- 3 領域
- 4 点列
- 5 ボルツアノ-ワイヤシュトラースの定理
- 6 有界閉領域上の連続関数

# 多変数関数

## 4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ポルツァ  
ノワイヤ  
シュトラースの定理

有界閉領域上の連続関数

定義 (2 変数関数  $z = f(x, y)$ )

平面上の各点  $(x, y)$  に数  $z$  をある規則で対応させる写像

$$z = x^2 - y^2$$

$$z = x^4 - xy + y^4$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$$

$$z = \log(x^2 + y^2), (x, y) \neq (0, 0)$$

$x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)$  などを**定義域**という

定義 (関数のグラフ)

空間の点  $(x, y, f(x, y))$  の集合 (曲面をあらわす)

$n$  変数 (多変数) 関数  $z = f(x_1, \dots, x_n)$

同様の議論が成立

# 多変数関数の極限

## 4.1 多変数関数

鈴木 譲

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ボルツァ  
ノワイヤ  
シュトラースの定理

有界閉領域  
上の連続  
関数

$$P = (x, y), Q = (a, b)$$

$$PQ := \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

定義 ( $P \rightarrow Q$ )

$$PQ \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow x \rightarrow a, y \rightarrow b)$$

$$|x - a|, |y - b| \leq PQ \leq |x - a| + |y - b|$$

# 多変数関数の極限 (続)

## 4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ボルツァ  
ノワイヤ  
シュトラースの定理

有界閉領域  
上の連続  
関数

定義 ( $f(P) \rightarrow A (P \rightarrow Q)$ )

$$PQ < \delta(\epsilon) \implies |f(P) - A| < \epsilon$$

なる  $\delta = \delta(\epsilon)$  が存在

2次元になると、 $P \rightarrow Q$  に様々な経路が存在

右極限、左極限だけではなく、360度からの近づけ方が存在

定義 ( $f(P)$  が  $Q$  で連続)

$$P \rightarrow Q \implies f(P) \rightarrow f(Q)$$

# 領域

## 4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ポルツァ  
ノワイヤ  
シュトラースの定理

有界閉領域上の連続関数

$D$ : 平面上の点集合

定義 ( $D$  が開集合)

$D$  の各点  $Q$  の  $\delta$ -近傍  $\{P = (x, y) \mid PQ < \delta\}$  が  $D$  に含まれる

定義 ((開) 領域)

- ①  $D$  が開集合
- ②  $D$  の任意の 2 点が  $D$  に含まれる曲線で結べる

定義 (閉領域)

領域とその境界のすべてをあわせた集合

定義 (半開領域)

領域とその境界の一部をあわせた集合

# 点列

## 4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ポルツァ  
ノワイヤ  
シュトラースの定理

有界閉領域  
上の連続  
関数

点列  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $P_n = (x_n, y_n)$   
 $P_0 = (x_0, y_0)$

定義 ( $P_n \rightarrow P_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ))

$P_0 P_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  
( $\iff x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ))

定義 (領域  $D$  が有界)

$$D \subseteq \{(x, y) | x^2 + y^2 < R^2\}$$

なる  $R > 0$  が存在

定義 (点列  $\{P_n\}$  が有界)

領域  $D = \{P_n | n = 1, 2, \dots\}$  が有界

# ボルツァノ-ワイヤシュトラースの定理

## 4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ボルツァノ-ワイヤシュトラースの定理

有界閉領域上の連続関数

### 定理 (ボルツァノ-ワイヤシュトラースの定理)

有界な無限集合の互いに異なる点からなる点列で、ある点に収束するものが存在する

### 系

有界な点列は収束する部分列を含む



# 有界閉領域上の連続関数

## 4.1 多変数関数

鈴木 謙

目次

多変数関数

多変数関数の極限

領域

点列

ポルツァ  
ノワイヤ  
シュトラースの定理

有界閉領域  
上の連続  
関数

$f(x, y)$ : 有界閉領域  $D$  上の連続関数

定理 (最大値・最小値の存在)

$f(P_0) \leq f(P) \leq f(Q_0), P \in D$  なる  $P_0, Q_0 \in D$  が存在

定理

$f$  の値域は、 $[f(P_0), f(Q_0)]$

定理 (中間値の定理)

$f(P) < f(Q)$  なる  $P, Q \in D$  について、  
 $f(P) < c < f(Q) \implies c = f(R)$  なる  $R \in D$  が存在

定理 (一様連続性)

$$PQ < \delta(\epsilon) \implies |f(P) - f(Q)| < \epsilon$$

なる  $\delta = \delta(\epsilon)$  が存在