

2.4 微分の
応用

鈴木 譲

目次

速度と加
速度

曲線の媒介
変数表示

解の近似値
(ニュート
ン法)

不等式

2.4 微分の応用

鈴木 譲

2009年6月17日(水)

目次

2.4 微分の
応用

鈴木 譲

目次

速度と加
速度

曲線の媒介
変数表示

解の近似値
(ニュート
ン法)

不等式

- 1 速度と加速度
- 2 曲線の媒介変数表示
- 3 解の近似値 (ニュートン法)
- 4 不等式

例 2.17: 速度と加速度

2.4 微分の
応用

鈴木 謙

目次

速度と加
速度

曲線の媒介
変数表示

解の近似値
(ニュート
ン法)

不等式

$$P = (x(t), y(t)) = (a \cos \theta(t), a \sin \theta(t))$$

($a > 0$, $\theta(t)$ は t の関数で 2 回微分可能)

速度

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = (-a\theta'(t) \sin \theta(t), a\theta'(t) \cos \theta(t))$$

速さ (等速円運動になっている)

$$|\mathbf{v}| = a|\theta'(t)|$$

加速度

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2} &= (-a\theta''(t) \sin \theta(t) - a\theta'(t)^2 \cos \theta(t), \\ & a\theta''(t) \cos \theta(t) - a\theta'(t)^2 \sin \theta(t)) \end{aligned}$$

$\theta'(t)$: 角速度、 $\theta''(t)$: 角加速度

例 2.18: 曲線の媒介変数表示

2.4 微分の
応用

鈴木 譲

目次

速度と加
速度

曲線の媒介
変数表示

解の近似値
(ニュート
ン法)

不等式

$y^2 - x^3 = 0$ の媒介変数表示

$$P = (x(t), y(t)) = (t^2, t^3)$$

原点で特異点

$$x'(0) = y'(0) = 0$$

それ以外 ($t \neq 0$) の $P(t^2, t^3)$ における接線の方程式は

$$3tx - 2y - t^3 = 0$$

例 2.19: サイクロイド

半径 a の円が x 軸上を滑らずに回転するときの円上の点の位置 $a > 0$ として、媒介変数表示は

$$P = (x(t), y(t)) = (at - a \sin t, a - a \cos t)$$

$$\frac{dP}{dt} = (a - a \cos t, a \sin t) = \left(2a \cos^2 \frac{t}{2}, 2a \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}\right)$$

より、 $t = 2n\pi$ 、すなわち $(2n\pi a, 0)$ (n : 整数) が特異点
接線の方程式

$$(\sin t)x - (1 - \cos t)y + a(2 - 2 \cos t - t \sin t) = 0$$

$$\text{速度: } \mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = (aw - aw \cos(\omega t), aw \sin(\omega t))$$

$$\text{加速度: } \boldsymbol{\alpha} = \frac{d^2P}{dt^2} = (aw^2 \sin(\omega t), aw^2 \cos(\omega t))$$

解の近似値 (ニュートン法)

2.4 微分の
応用

鈴木 謙

目次

速度と加
速度

曲線の媒介
変数表示

解の近似値
(ニュート
ン法)

不等式

$f(x)$: $[a, b]$ 上の 2 回微分可能な関数

$f(a) > 0, f(b) < 0$

$[a, b]$ で $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

$$f(x) = 0 \quad (a < x < b)$$

の解 $x = c$ を求める

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

とおくと、 $x_n \rightarrow c \quad (n \rightarrow \infty)$

定理

2回微分可能な $f(x)$ がある区間で $f''(x) > 0$ のとき、

$$\frac{1}{n} \{f(x_1) + \cdots + f(x_n)\} \geq f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

等号成立は $x_1 = \cdots = x_n$ のとき

系

$x_1, \cdots, x_n > 0$ のとき

$$\frac{1}{n} \{x_1 + \cdots + x_n\} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

等号成立は $x_1 = \cdots = x_n$ のとき