2.4 微分の応用

鈴木 讓

2009 年 6 月 17 日 (水)

目次

例 2.17: 速度と加速度

$$P = (x(t), y(t)) = (a\cos\theta(t), a\sin\theta(t))$$

$(a > 0,\ \theta(t)$ は t の関数で 2 回微分可能)

速度

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = (-a\theta'(t)\sin\theta t, a\theta'(t)\cos\theta(t))$$

速さ (等速円運動になっている)

$$|\mathbf{v}| = a|\theta'(t)|$$

加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2} &= (-a\theta''(t)\sin\theta(t) - a\theta'(t)^2\cos\theta(t), \\ &\quad a\theta''(t)\cos\theta(t) - a\theta'(t)^2\sin\theta(t))\end{aligned}$$

$\theta'(t)$: 角速度、$\theta''(t)$: 角加速度

例 2.18: 曲線の媒介変数表示

$y^2 - x^3 = 0$ の媒介変数表示

$$P = (x(t), y(t)) = (t^2, t^3)$$

原点で特異点

$$x'(0) = y'(0) = 0$$

それ以外 $(t \neq 0)$ の $P(t^2, t^3)$ における接線の方程式は

$$3tx - 2y - t^3 = 0$$

例 2.19: サイクロイド

半径 a の円が x 軸上を滑らずに回転するときの円上の点の位置 $a > 0$ として、媒介変数表示は

$$P = (x(t), y(t)) = (at - a\sin t, a - a\cos t)$$

$$\frac{dP}{dt} = (a - a\cos t, a\sin t) = (2a\cos^2\frac{t}{2}, 2a\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2})$$

より、$t = 2n\pi a$、すなわち $(2n\pi a, 0)$ (n: 整数) が特異点
接線の方程式

$$(\sin t)x - (1 - \cos t)y + a(2 - 2\cos t - t\sin t) = 0$$

速度: $\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = (a\omega - a\omega\cos(\omega t), a\omega\sin(\omega t))$

加速度: $\boldsymbol{\alpha} = \frac{d^2P}{dt^2} = (a\omega^2\sin(\omega t), a\omega^2\cos(\omega t))$

解の近似値 (ニュートン法)

$f(x)$: $[a,b]$ 上の 2 回微分可能な関数
$f(a)>0,\ f(b)<0$
$[a,b]$ で $f'(x)<0, f''(x)>0$

$$f(x)=0\ (a<x<b)$$

の解 $x=c$ を求める

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

とおくと、$x_n\to c\ (n\to\infty)$

不等式

定理

2 回微分可能な $f(x)$ がある区間で $f''(x) > 0$ のとき、

$$\frac{1}{n}\{f(x_1) + \cdots + f(x_n)\} \geq f(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n})$$

等号成立は $x_1 = \cdots = x_n$ のとき

系

$x_1, \cdots, x_n > 0$ のとき

$$\frac{1}{n}\{x_1 + \cdots + x_n\} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

等号成立は $x_1 = \cdots = x_n$ のとき