2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 讓

2009 年 6 月 17 日 (水)

目次

コーシーの平均値の定理

定理

コーシーの平均値の定理 $f(x), g(x)$ が $[a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能で、(a, b) で $g'(x) \neq 0$ とする。このとき、

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす c が存在する。

証明: $g(b) = g(a)$ であれば、ロルの定理より、$g'(c) = 0$ なる $a < c < b$ が存在して仮定と矛盾。

$$A := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$F(x) := f(x) - A\{g(x) - g(a)\}$$

$F(a) = F(b)$、$[a, b]$ で連続、(a, b) で微分可能
$0 = F'(c) = f'(c) - Ag'(c)$ なる $a < c < b$ が存在 (ロルの定理)。

ロピタルの定理

定理 (ロピタルの定理 (その 1))

$f(x), g(x)$ が開区間 (a, b) で微分可能、$g'(x) \neq 0$、

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$$

のとき、

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Longrightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

1. $x \to a+0$ を $x \to b-0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ にかえてもよい。
2. A を ∞, $-\infty$ にかえてもよい。

不定形

$\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0

例 2.14

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x\cos x - x^2\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x - 4x\sin x - x^2\cos x} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

ロピタルの定理 (続)

定理 (ロピタルの定理 (その 2))

$f(x), g(x)$ が開区間 (a, b) で微分可能、$g'(x) \neq 0$、

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a+0} g(x) = \pm\infty$$

のとき、

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Longrightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

1. $x \to a+0$ を $x \to b-0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ にかえてもよい。
2. A を ∞, $-\infty$ にかえてもよい。

例 2.15

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x}=+\infty$$

例 2.16

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0} x\log\tan x &= \lim_{x\to+0}\frac{\log\tan x}{1/x}\\ &= \lim_{x\to+0}\frac{(1/\tan x)(1/\cos^2 x)}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to+0} x\frac{x}{\sin x}\frac{-1}{\cos x} = 0\end{aligned}$$

2. $\log((\sin x)^{\sin x}) = \sin x \log\sin x = \dfrac{\log\sin x}{1/\sin x}$

$$\lim_{x\to+0}\log((\sin x)^{\sin x}) = \lim_{x\to+0}\frac{\cos x/\sin x}{-\cos x/\sin^2 x} = \lim_{x\to+0} -\sin x = 0$$

$$\lim_{x\to+0}(\sin x)^{\sin x} = 1$$

例 2.16(続)

3.

$$x(\log x - 1) > \log 2 \Longrightarrow \frac{x^x}{e^x} > 2 \Longrightarrow x^x - e^x = e^x\left(\frac{x^x}{e^x} - 1\right) > e^x$$

したがって、$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^x - e^x) = +\infty$

4.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{\sin x + x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ロピタルの定理 (その 1) の証明

任意に $\epsilon > 0$ を設定し、$|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \dfrac{\epsilon}{2}$ のとき、
$f(t) \to 0,\ g(t) \to 0\ (t \to a+0)$ より、
$a < t < x$ を以下のようにとれる:

$$|g(t)| < \frac{|g(x)|}{2},\quad \frac{|g(x)||f(t)| + |f(x)||g(t)|}{|g(x)|^2} < \frac{\epsilon}{4}$$

$$\begin{aligned}
|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(t)}{g(x)-g(t)}| &= \frac{g(x)f(t)-f(x)g(t)}{|g(x)||g(x)-g(t)|} \\
&< \frac{|g(x)||f(t)| + |f(x)||g(t)|}{|g(x)|^2/2} < \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

ロピタルの定理 (その 1) の証明 (続)

コーシーの平均値の定理より、以下の $t < u < x$ が存在する:

$$\frac{f(x)-f(t)}{g(x)-g(t)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

したがって、

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(u)}{g'(u)}\right| + \left|\frac{f'(u)}{g'(u)} - A\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ロピタルの定理 (その 1) の証明 (続)

任意に $G > 0$ を設定し、$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > G + 1$ のとき、「ロピタルの定理の証明 (1)」と同様の議論から、

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(u)}{g'(u)}\right| < 1$$

なる $a < u < x$ が存在する。したがって、

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f'(u)}{g'(u)} - 1 > G$$

ロピタルの定理 (その 2) の証明

任意に $\epsilon > 0$ を設定すると、$B(t) := \dfrac{f'(t)}{g'(t)} - A(a < t < c)$ が、

$|B(t)| < \dfrac{\epsilon}{2}$

となるように $a < c < b$ を設定できる

$$\frac{1 - g(c)/g(u)}{1 - f(c)/f(u)} = 1 + C(u),\ |C(u)| < \frac{\epsilon}{2(1+A)},\ a < u < d$$

となるように $a < d < c$ を設定できる。

ロピタルの定理 (その 2) の証明 (続)

コーシーの平均値の定理より、

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(u)-f(c)}{g(u)-g(c)} = \frac{f(u)}{g(u)} \cdot \frac{1-f(c)/f(u)}{1-g(c)/g(u)}$$

となる $u < t < c$ が存在する。したがって、

$$\frac{f(u)}{g(u)} = \frac{1-g(c)/g(u)}{1-f(c)/f(u)} \cdot \frac{f'(t)}{g'(t)} = (1+C(u))(A+B(t))$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(u)}{g(u)} - A\right| &\leq |B(t)| + |C(u)|(|A| + |B(t)|) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(1+|A|)}(|A| + \frac{\epsilon}{2}) < \epsilon \end{aligned}$$