

## 2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 譲

2009年6月17日(水)

# 目次

2.3 コー  
シーの平均  
値の定理と  
ロピタルの  
定理

鈴木 譲

目次

コーシーの  
平均値の  
定理

ロピタルの  
定理

① コーシーの平均値の定理

② ロピタルの定理

# コーシーの平均値の定理

2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 譲

目次

コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理

## 定理

コーシーの平均値の定理  $f(x), g(x)$  が  $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能で、 $(a, b)$  で  $g'(x) \neq 0$  とする。このとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす  $c$  が存在する。

証明:  $g(b) = g(a)$  であれば、ロルの定理より、 $g'(c) = 0$  なる  $a < c < b$  が存在して仮定と矛盾。

$$A := \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$F(x) := f(x) - A\{g(x) - g(a)\}$$

$F(a) = F(b)$ 、 $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能

$0 = F'(c) = f'(c) - Ag'(c)$  なる  $a < c < b$  が存在 (ロルの定理)。

# ロピタルの定理

2.3 コー  
シーの平均  
値の定理と  
ロピタルの  
定理

鈴木 譲

目次

コーシーの  
平均値の  
定理

ロピタルの  
定理

## 定理 (ロピタルの定理 (その 1))

$f(x), g(x)$  が开区間  $(a, b)$  で微分可能、 $g'(x) \neq 0$ 、

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$$

のとき、

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \implies \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

- ①  $x \rightarrow a+0$  を  $x \rightarrow b-0, x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$  にかえてもよい。
- ②  $A$  を  $\infty, -\infty$  にかえてもよい。

## 不定形

$$\frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

## 例 2.14

2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 譲

目次

コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x \cos x - x^2 \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

## ロピタルの定理 (続)

2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 謙

目次

コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理

### 定理 (ロピタルの定理 (その 2))

$f(x), g(x)$  が开区間  $(a, b)$  で微分可能、 $g'(x) \neq 0$ 、

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \pm\infty$$

のとき、

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \implies \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

- ①  $x \rightarrow a+0$  を  $x \rightarrow b-0, x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$  にかえてもよい。
- ②  $A$  を  $\infty, -\infty$  にかえてもよい。

## 例 2.15

2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 譲

目次

コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = +\infty$$

## 例 2.16

2.3 コー  
シーの平均  
値の定理と  
ロピタルの  
定理

鈴木 譲

目次

コーシーの  
平均値の  
定理

ロピタルの  
定理

①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} x \log \tan x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log \tan x}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(1/\tan x)(1/\cos^2 x)}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} x \frac{x}{\sin x} \frac{-1}{\cos x} = 0\end{aligned}$$

②  $\log((\sin x)^{\sin x}) = \sin x \log \sin x = \frac{\log \sin x}{1/\sin x}$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \log((\sin x)^{\sin x}) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x / \sin x}{-\cos x / \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow +0} -\sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^{\sin x} = 1$$

## 例 2.16(続)

2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 譲

目次

コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理

3

$$x(\log x - 1) > \log 2 \implies \frac{x^x}{e^x} > 2 \implies x^x - e^x = e^x \left( \frac{x^x}{e^x} - 1 \right) > e^x$$

したがって、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^x - e^x) = +\infty$

4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

# ロピタルの定理 (その1) の証明

2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 謙

目次

コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理

任意に  $\epsilon > 0$  を設定し、 $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\epsilon}{2}$  のとき、  
 $f(t) \rightarrow 0, g(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow a+0$ ) より、  
 $a < t < x$  を以下のようにとれる:

$$|g(t)| < \frac{|g(x)|}{2}, \quad \frac{|g(x)||f(t)| + |f(x)||g(t)|}{|g(x)|^2} < \frac{\epsilon}{4}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} \right| &= \frac{g(x)f(t) - f(x)g(t)}{|g(x)||g(x) - g(t)|} \\ &< \frac{|g(x)||f(t)| + |f(x)||g(t)|}{|g(x)|^2/2} < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

# ロピタルの定理 (その 1) の証明 (続)

2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 謙

目次

コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理

コーシーの平均値の定理より、以下の  $t < u < x$  が存在する:

$$\frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

したがって、

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(u)}{g'(u)} \right| + \left| \frac{f'(u)}{g'(u)} - A \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

## ロピタルの定理 (その 1) の証明 (続)

2.3 コーシーの平均値の定理とロピタルの定理

鈴木 謙

目次

コーシーの平均値の定理

ロピタルの定理

任意に  $G > 0$  を設定し、 $\frac{f'(x)}{g'(x)} > G + 1$  のとき、  
「ロピタルの定理の証明 (1)」と同様の議論から、

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(u)}{g'(u)} \right| < 1$$

なる  $a < u < x$  が存在する。したがって、

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f'(u)}{g'(u)} - 1 > G$$

## ロピタルの定理 (その2) の証明

2.3 コー  
シーの平均  
値の定理と  
ロピタルの  
定理

鈴木 謙

目次

コーシーの  
平均値の  
定理

ロピタルの  
定理

任意に  $\epsilon > 0$  を設定すると、 $B(t) := \frac{f'(t)}{g'(t)} - A (a < t < c)$  が、

$$|B(t)| < \frac{\epsilon}{2}$$

となるように  $a < c < b$  を設定できる

$$\frac{1 - g(c)/g(u)}{1 - f(c)/f(u)} = 1 + C(u), \quad |C(u)| < \frac{\epsilon}{2(1+A)}, \quad a < u < d$$

となるように  $a < d < c$  を設定できる。

## ロピタルの定理 (その2) の証明 (続)

2.3 コー  
シーの平均  
値の定理と  
ロピタルの  
定理

鈴木 譲

目次

コーシーの  
平均値の  
定理

ロピタルの  
定理

コーシーの平均値の定理より、

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(u) - f(c)}{g(u) - g(c)} = \frac{f(u)}{g(u)} \cdot \frac{1 - f(c)/f(u)}{1 - g(c)/g(u)}$$

となる  $u < t < c$  が存在する。したがって、

$$\frac{f(u)}{g(u)} = \frac{1 - g(c)/g(u)}{1 - f(c)/f(u)} \cdot \frac{f'(t)}{g'(t)} = (1 + C(u))(A + B(t))$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(u)}{g(u)} - A \right| &\leq |B(t)| + |C(u)|(|A| + |B(t)|) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(1 + |A|)}(|A| + \frac{\epsilon}{2}) < \epsilon \end{aligned}$$