

2.2 平均値の定理とテイラーの定理

鈴木 譲

2009年6月3日(水)

目次

2.2 平均値
の定理とテイラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

- ① ロルの定理
- ② 平均値の定理
- ③ 極大・極小
- ④ テイラーの定理
- ⑤ テイラーの定理の証明

ロルの定理

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定理

$f(x): [a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能, $f(a) = f(b)$
 $\implies f'(c) = 0$ なる c ($a < c < b$) が存在

証明: $f(x)$: 定数関数 \implies 恒等的に $f'(x) = 0$

$f(x) > f(a) = f(b)$ なる x が存在すれば、

$[a, b]$ での $f(x)$ の最大値 $f(c)$ ($a < c < b$) が存在

$$\begin{cases} x > c \implies 0 \geq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \rightarrow f'(c), & x \rightarrow c \\ x < c \implies 0 \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \rightarrow f'(c), & x \rightarrow c \end{cases}$$

$f: x = c$ で微分可能より、 $f'(c) = 0$

$f(x) < f(a) = f(b)$ なる x が存在する場合も同様

平均値の定理

2.2 平均値
の定理とテイ
ラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定理

$$\begin{aligned} & f(x): [a, b] \text{ で連続, } (a, b) \text{ で微分可能, } f(a) = f(b) \\ \implies & \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ なる } c \text{ (} a < c < b \text{) が存在} \end{aligned}$$

$$\text{証明: } A := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$F(x) := f(x) - Ax$ は、 $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能

$$F(a) = F(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

ロルの定理より、

$$F'(c) = f'(c) - A = 0$$

なる $c(a < c < b)$ が存在

例 2.11 (図 2-10)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

$f(x) = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq b$) は連続だが、 $x = 0$ で微分可能ではない

$$\frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{\sqrt{b}}{b} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

より、 $c = b/4$

平均値の定理 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定理

$f(x)$: $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能

$f(x)$ が (a, b) で恒等的に $0 \implies f(x)$: 定数関数

証明: $a \leq x < t \leq b$ なる任意の x, t について、平均値の定理より、

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(c) = 0$$

なる $x < c < t$ が存在するので、 $f(x) = f(t)$

平均値の定理 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定理

$f(x): [a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能, $f'(x) > 0$
 $\implies f(x):$ 単調増加

($f'(x) < 0$ のときは単調減少)

例 2.12: $x > 0 \implies x > \sin x$

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定理 2.10 より、 $f(x) := x - \sin x$ は

- ① $[-3\pi/2, \pi/2], [\pi/2, 5\pi/2]$ で単調増加、
- ② $[-3\pi/2, 5\pi/2]$ で単調増加
- ③ $(-\infty, \infty)$ で単調増加

$f(0) = 0$ より、 $x > 0 \implies f(x) > 0$

極大・極小

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 謙

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定義 $f(x)$ が $x = c$ で極大)

$$0 < |x - c| < \delta \implies f(x) < f(c)$$

なる $\delta > 0$ が存在。 $f(c)$ を極大値という。

定義 $f(x)$ が $x = c$ で極小)

$$0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > f(c)$$

なる $\delta > 0$ が存在。 $f(c)$ を極小値という。

極大・極小 (続)

2.2 平均値
の定理とテイラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定理

- ① $f(x)$ が点 c で微分可能で、極大ならば、 $f'(c) = 0$
- ② 連続関数 $f(x)$ が定義域の 1 点 c の近傍で微分可能で、

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & x < c \\ < 0, & c < x \end{cases}$$

であれば、 $x = c$ で極大。(極小に関しても同様に成立。)

極大・極小 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

証明: 1. は、 $f(x)$ が $x = c$ で極大であれば、

$$\begin{cases} x < c \implies f(x) < f(c), & \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0 \\ x > c \implies f(x) < f(c), & \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \end{cases}$$

$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \rightarrow 0$ で、 $x = c$ で $f(x)$ が微分可能ゆえ、 $f'(c) = 0$

2. は、平均値の定理より、 $x < c$, $x > c$ のそれぞれで、

$$f'(t) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \begin{cases} > 0, & x < t < c \\ < 0, & c < t < x \end{cases}$$

なる t が存在するので、 $x < c$, $c < x$ の両方で

$$f(x) < f(c)$$

したがって、 $f(x)$ は c で極大

極大・極小 (続)

2.2 平均値
の定理とテイ
ラーの
定理

鈴木 謙

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定義 ($f(x)$: n 回連続微分可能 (C^n 級))

n 回微分可能で、 $f^{(n)}(x)$ が連続
何回でも微分可能であるとき、 C^∞ とよぶ

例: $f(x) := x^{n+1}$ ($x \geq 0$), $= 0$ ($x < 0$) は、 C^{n+1} 級ではない

定理

$f(x): C^2$, $f'(c) = 0$,
 $f''(c) > 0 \implies f(x)$ $x = c$ で極小
 $f''(c) < 0 \implies f(x)$ $x = c$ で極大

証明: $f''(c) > 0$, f'' : 連続より、 $x = c$ の近傍で $f''(x) > 0$

定理 2.10 より、 $x = c$ の近傍で $f'(x)$ が単調増加

$f'(c) = 0$ より、 $\begin{cases} f'(x) < 0, & x < c \\ f'(x) > 0, & x > c \end{cases}$

定理 2.11 より、 $x = c$ で極小

テイラーの定理

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 謙

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

平均値の定理

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$$

$$b = a + h, c = a + \theta h \quad (0 < \theta < 1)$$

$$f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta h)h$$

定理

$f(x)$: $[a, b]$ で C^{n-1} 級、 (a, b) で n 回微分可能のとき、

$$\begin{aligned} f(b) = & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \end{aligned}$$

なる $a < c < b$ が存在

テイラーの定理 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 謙

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

a, b を入れ替えてもよい (証明が成立する):

$f(x)$: $[a, b]$ で C^{n-1} 級、 (a, b) で n 回微分可能のとき、

$$\begin{aligned} f(a) = & f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(a-b) + \frac{f''(b)}{2!}(a-b)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(a-b)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(a-b)^n \end{aligned}$$

なる $a < c < b$ が存在

テイラーの定理 (続)

$$b = a + h, c = a + \theta h \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\begin{aligned} f(a+h) = & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n \end{aligned}$$

なる $0 < \theta < 1$ が存在することと同値

$h > 0, h < 0$ いずれでもよい ($a < b, b < a$ いずれでもよい)

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

を剰余項とよび、 R_n とあらわす。

$a = 0$ の場合を、マクローリンの定理とよぶ。

例 2.13

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

- $x \geq 0$ なら $[0, x]$ で、 $x < 0$ なら $[x, 0]$ に対して適用
($a < b$ でも $a > b$ でも成立)
- $f^{(n)}(x)$ の一般項を求める

例 2.13(続)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\theta x} \right)^n x^n$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!} x + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} (1+\theta x)^{a-n} x^n$$

テイラーの定理 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定理 (定理 2.10, 定理 2.12 の一般化)

$$n \geq 2$$

$$f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0, f^{(n)}(c) \neq 0$$

- ① n : 偶数、 $f^{(n)}(c) > 0 \implies f(x)$: $x = c$ で極小
 - ② n : 奇数、 $f^{(n)}(c) > 0 \implies f(x)$: $x = c$ の近傍で単調増加
- $f^{(n)}(c) < 0$ のとき、それぞれ極大、単調減少。

テイラーの定理 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 譲

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

証明:

$$\begin{aligned} & f(c+h) - f(c) \\ = & \frac{f'(c)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n \\ = & \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n \end{aligned}$$

$f^{(n)}(x)$: 連続、 $|h|$ 小で $f^{(n)}(c+\theta h)$ と $f^{(n)}(c)$ は同符号
 n : 偶数、 $f^{(n)}(c) > 0$ ゆえ、

$$f(c) < f(c+h)$$

テイラーの定理 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 謙

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

証明:

$f(x)$ ではなく $f'(x)$ に、 n ではなく $n-1$ に適用

$$\begin{aligned} & f'(c+h) \\ = & f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-2)}(c)}{(n-2)!}h^{n-2} + \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{(n-1)!}h^{n-1} \\ = & \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{(n-1)!}h^{n-1} \end{aligned}$$

$f^{(n)}(x)$: 連続、 $|h|$ 小で $f^{(n)}(c+\theta h)$ と $f^{(n)}(c)$ は同符号

n : 奇数、 $f^{(n)}(c) > 0$ ゆえ、 $x = c$ 以外で $f'(x) > 0$

定理 2.10 で、 $[c-\delta, c]$, $[c, c+\delta]$ で単調増加ゆえ、

$[c-\delta, c+\delta]$ で単調増加

テイラーの定理 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 謙

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定義 (P で下 (上) に凸)

その接線が、 P の近くでグラフの下 (上) 側

定理

$f(x)$: 2回微分可能, $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) のとき、
 $y = f(x)$ は下 (上) に凸

証明: 接線 $y = f'(x)(x - c) + f(c)$ が下側にあれば、
 $x = c + h, h \neq 0$ として、

$$f(c + h) - f(c) - f'(c)h > 0$$

テーラの定理より、 $0 < \theta < 1$ として、

$$f(c + h) - f(c) - f'(c)h = \frac{f''(c + \theta h)}{2!} h^2$$

h は任意であったので、十分小さく取れば、定理が成立する。
(上に凸の場合も同様)

テイラーの定理 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 謙

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定義 (点 P が変曲点)

点 P を境にして、凸の上下が変わる

定理

- ① $f(x)$: \mathbf{C}^2 級, $(c, f(c))$ が変曲点であれば、 $f''(c) = 0$
- ② $n \geq 3$, \mathbf{C}^n 級の $f(x)$ が $x = c$ で

$$f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0, f^{(n)}(c) \neq 0$$

のとき、

- ① n : 偶数, $f^{(n)}(c) > 0 \implies f(x)$ は $P(c, f(c))$ で下に凸
- ② n : 偶数, $f^{(n)}(c) < 0 \implies f(x)$ は $P(c, f(c))$ で上に凸
- ③ n : 奇数 $\implies P$ は変曲点

テイラーの定理の証明

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 謙

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

定数 A および関数 $F(x)$ を以下のように定める

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{A}{n!}(b-a)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &:= f(b) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{A}{n!}(b-x)^n \right\} \end{aligned}$$

$F(x)$ は $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能、 $F(a) = F(b)$ より、ロルの定理が適用できる

テイラーの定理の証明 (続)

2.2 平均値
の定理とテ
イラーの
定理

鈴木 謙

目次

ロルの定理

平均値の
定理

極大・極小

テイラーの
定理

テイラーの
定理の証明

$$\begin{aligned} 0 &= F'(c) \\ &= -\left\{f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(b-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}\right\} \\ &\quad + \left\{f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(b-c) + \cdots + \frac{A}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}\right\} \\ &= -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} \end{aligned}$$

$$A = f^{(n)}(c)$$

これを最初の式に代入して、定理の式が得られる。

a, b を逆にしても、 $A = f^{(n)}(c)$ が得られる。