2.2 平均値の定理とテイラーの定理

鈴木 讓

2009 年 6 月 3 日 (水)

目次

ロルの定理

定理

$$\begin{array}{ll} & f(x)\text{: } [a,b] \text{ で連続, } (a,b) \text{ で微分可能,} f(a)=f(b) \\ \Longrightarrow & f'(c)=0 \text{ なる } c\ (a<c<b) \text{ が存在} \end{array}$$

証明: $f(x)$:定数関数 $\Longrightarrow$ 恒等的に $f'(x)=0$

$f(x)>f(a)=f(b)$ なる x が存在すれば、

$[a,b]$ での $f(x)$ の最大値 $f(c)$ $(a<c<b)$ が存在

$$\begin{cases} x>c & \Longrightarrow \quad 0 \geq \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \to f'(c), \quad x \to c \\ x<c & \Longrightarrow \quad 0 \leq \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \to f'(c), \quad x \to c \end{cases}$$

f: $x=c$ で微分可能より、$f'(c)=0$

$f(x)<f(a)=f(b)$ なる x が存在する場合も同様

平均値の定理

定理

$f(x)$: $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能,$f(a)=f(b)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{ なる } c\ (a<c<b) \text{ が存在}$$

証明: $A:=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$F(x):=f(x)-Ax$ は、$[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能

$$F(a)=F(b)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

ロルの定理より、

$$F'(c)=f'(c)-A=0$$

なる $c(a<c<b)$ が存在

例 2.11 (図 2-10)

$f(x)=\sqrt{x}$ $(0 \le x \le b)$ は連続だが、$x=0$ で微分可能ではない

$$\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=\frac{\sqrt{b}}{b}=f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c}}$$

より、$c=b/4$

平均値の定理 (続)

定理

$f(x)$: $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能
$f(x)$ が (a, b) で恒等的に 0 $\Longrightarrow$ $f(x)$: 定数関数

証明: $a \leq x < t \leq b$ なる任意の x, t について、平均値の定理より、

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(c) = 0$$

なる $x < c < t$ が存在するので、$f(x) = f(t)$

平均値の定理 (続)

定理

$$
\begin{array}{ll}
 & f(x)\text{: } [a,b] \text{ で連続, } (a,b) \text{ で微分可能, } f'(x)>0 \\
\Longrightarrow & f(x)\text{: 単調増加}
\end{array}
$$

($f'(x)<0$ のときは単調減少)

例 2.12: $x > 0 \Longrightarrow x > \sin x$

定理 2.10 より、$f(x) := x - \sin x$ は

1. $[-3\pi/2, \pi/2], [\pi/2, 5\pi/2]$ で単調増加、
2. $[-3\pi/2, 5\pi/2]$ で単調増加
3. $(-\infty, \infty)$ で単調増加

$f(0) = 0$ より、$x > 0 \Longrightarrow f(x) > 0$

極大・極小

定義 ($f(x)$ が $x = c$ で極大)

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(c)$$

なる $\delta > 0$ が存在。$f(c)$ を極大値という。

定義 ($f(x)$ が $x = c$ で極小)

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) > f(c)$$

なる $\delta > 0$ が存在。$f(c)$ を極小値という。

極大・極小 (続)

定理

1. $f(x)$ が点 c で微分可能で、極大ならば、$f'(c) = 0$
2. 連続関数 $f(x)$ が定義域の *1* 点 c の近傍で微分可能で、

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & x < c \\ < 0, & c < x \end{cases}$$

であれば、$x = c$ で極大。*(*極小に関しても同様に成立。*)*

極大・極小 (続)

証明: 1. は、$f(x)$ が $x=c$ で極大であれば、

$$\begin{cases} x<c & \Longrightarrow & f(x)<f(c), & \frac{f(x)-f(x)}{x-c}<0 \\ x>c & \Longrightarrow & f(x)<f(c), & \frac{f(x)-f(x)}{x-c}>0 \end{cases}$$

$\dfrac{f(x)-f(x)}{x-c} \to 0$ で、$x=c$ で $f(x)$ が微分可能ゆえ、$f'(c)=0$

2. は、平均値の定理より、$x<c$, $x>c$ のそれぞれで、

$$f'(t)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\begin{cases} >0, & x<t<c \\ <0, & c<t<x \end{cases}$$

なる t が存在するので、$x<c, c<x$ の両方で

$$f(x)<f(c)$$

したがって、$f(x)$ は c で極大

極大・極小 (続)

定義 ($f(x)$: n 回連続微分可能 ($\mathbf{C}^n$ 級))

n 回微分可能で、$f^{(n)}(x)$ が連続
何回でも微分可能であるとき、$\mathbf{C}^\infty$ とよぶ

例: $f(x) := x^{n+1}$ $(x \geq 0)$, $= 0 (x < 0)$ は、$\mathbf{C}^{n+1}$ 級ではない

定理

$f(x)$: $\mathbf{C}^2$, $f'(c) = 0$,
$f''(c) > 0 \Longrightarrow f(x)$ $x = c$ で極小
$f''(c) < 0 \Longrightarrow f(x)$ $x = c$ で極大

証明: $f''(c) > 0$, f'': 連続より、$x = c$ の近傍で $f''(x) > 0$
定理 2.10 より、$x = c$ の近傍で $f'(x)$ が単調増加

$$f'(c) = 0 \text{ より、} \begin{cases} f'(x) < 0, & x < c \\ f'(x) > 0, & x > c \end{cases}$$

定理 2.11 より、$x = c$ で極小

テイラーの定理

平均値の定理

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

$b = a + h, c = a + \theta h \ (0 < \theta < 1)$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$$

定理

$f(x)$: $[a, b]$ で $\mathbf{C}^{n-1}$ 級、(a, b) で n 回微分可能のとき、

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \end{aligned}$$

なる $a < c < b$ が存在

テイラーの定理 (続)

a, b を入れ替えてもよい (証明が成立する):

$f(x)$: $[a, b]$ で $\mathbf{C}^{n-1}$ 級、(a, b) で n 回微分可能のとき、

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(a-b) + \frac{f''(b)}{2!}(a-b)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(a-b)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(a-b)^n \end{aligned}$$

なる $a < c < b$ が存在

テイラーの定理 (続)

$b = a + h, c = a + \theta h \ (0 < \theta < 1)$

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n
\end{aligned}
$$

なる $0 < \theta < 1$ が存在することと同値

$h > 0, h < 0$ いずれでもよい ($a < b, b < a$ いずれでもよい)

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

を剰余項とよび、R_n とあらわす。

$a = 0$ の場合を、マクローリンの定理とよぶ。

例 2.13

- $x \geq 0$ なら $[0, x]$ で、$x < 0$ なら $[x, 0]$ に対して適用 ($a < b$ でも $a > b$ でも成立)
- $f^{(n)}(x)$ の一般項を求める

例 2.13(続)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^n x^n$$

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= 1 + \frac{a}{1!}x + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} \\ &\quad + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}(1+\theta x)^{a-n}x^n\end{aligned}$$

テイラーの定理 (続)

定理 (定理 2.10, 定理 2.12 の一般化)

$n \geq 2$

$$f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, f^{(n)}(c) \neq 0$$

1. n: 偶数、$f^{(n)}(c) > 0 \Longrightarrow f(x)$: $x = c$ で極小
2. n: 奇数、$f^{(n)}(c) > 0 \Longrightarrow f(x)$: $x = c$ の近傍で単調増加

$f^{(n)}(c) < 0$ のとき、それぞれ極大、単調減少。

テイラーの定理 (続)

証明:

$$
\begin{aligned}
& f(c+h)-f(c) \\
= \quad & \frac{f'(c)}{1!}h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n \\
= \quad & \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n
\end{aligned}
$$

$f^{(n)}(x)$: 連続、$|h|$ 小で $f^{(n)}(c+\theta h)$ と $f^{(n)}(c)$ は同符号
n:偶数、$f^{(n)}(c)>0$ ゆえ、

$$f(c)<f(c+h)$$

テイラーの定理 (続)

証明:
$f(x)$ ではなく $f'(x)$ に、n ではなく $n-1$ に適用

$$\begin{aligned} & f'(c+h) \\ = \quad & f'(c)+\frac{f''(c)}{1!}h+\cdots+\frac{f^{(n-2)}(c)}{(n-2)!}h^{n-2}+\frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{(n-1)!}h^{n-1} \\ = \quad & \frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{(n-1)!}h^{n-1} \end{aligned}$$

$f^{(n)}(x)$: 連続、$|h|$ 小で $f^{(n)}(c+\theta h)$ と $f^{(n)}(c)$ は同符号
n:奇数、$f^{(n)}(c)>0$ ゆえ、$x=c$ 以外で $f'(x)>0$
定理 2.10 で、$[c-\delta, c]$, $[c, c+\delta]$ で単調増加ゆえ、
$[c-\delta, c+\delta]$ で単調増加

テイラーの定理 (続)

定義 (P で下 (上) に凸)

その接線が、P の近くでグラフの下 *(上)* 側

定理

$f(x)$: 2回微分可能, $f''(x) > 0$ *($f''(x) < 0$)* のとき、
$y = f(x)$ は下 *(上)* に凸

証明: 接線 $y = f'(x)(x-c) + f(c)$ が下側にあれば、
$x = c + h, h \neq 0$ として、

$$f(c+h) - f(c) - f'(c)h > 0$$

テーラの定理より、$0 < \theta < 1$ として、

$$f(c+h) - f(c) - f'(c)h = \frac{f''(c+\theta h)}{2!}h^2$$

h は任意であったので、十分小さく取れば、定理が成立する。
(上に凸の場合も同様)

テイラーの定理 (続)

定義 (点 P が変曲点)

点 P を境にして、凸の上下が変わる

定理

1. $f(x)$: $\mathbf{C}^2$ 級, $(c, f(c))$ が変曲点であれば、$f''(c) = 0$
2. $n \geq 3$, $\mathbf{C}^n$ 級の $f(x)$ が $x = c$ で

$$f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, f^{(n)}(c) \neq 0$$

のとき、

1. n: 偶数, $f^{(n)}(c) > 0 \Longrightarrow f(x)$ は P $(c, f(c))$ で下に凸
2. n: 偶数, $f^{(n)}(c) < 0 \Longrightarrow f(x)$ は P $(c, f(c))$ で上に凸
3. n: 奇数 $\Longrightarrow P$ は変曲点

テイラーの定理の証明

定数 A および関数 $F(x)$ を以下のように定める

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{A}{n!}(b-a)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &:= f(b) - \{f(x) + + \frac{f(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{A}{n!}(b-x)^n \end{aligned}$$

$F(x)$ は $[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能、$F(a)=F(b)$ より、ロルの定理が適用できる

テイラーの定理の証明 (続)

$$
\begin{aligned}
0 &= F'(c) \\
&= -\{f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(b-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}\} \\
&\quad +\{f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(b-c) + \cdots + \frac{A}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}\} \\
&= -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$A = f^{(n)}(c)$$

これを最初の式に代入して、定理の式が得られる。

a, b を逆にしても、$A = f^{(n)}(c)$ が得られる。