2.1 導関数

鈴木 譲

2009 年 5 月 27 日 (水)

目次

微分係数と微分可能性

平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

瞬間変化率 平均変化率の $b \to a$ の極限 (接線の傾き)

定義 ($x=a$ で微分可能)

$x=a$ での微分係数 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在

定義 ($x=a$ で右微分可能)

$x=a$ での右微分係数 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在

(左微分可能、左微分係数も同様に定義される)

$$\text{微分可能} \Longleftrightarrow \text{右微分係数} = \text{左微分係数}$$

例 2.1

$f(x) = |x|$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1$$

(右微分可能かつ左微分可能だが、右微分係数 $\neq$ 左微分係数)

$f(x)$ は、$x = 0$ で微分可能ではない

例 2.2

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \sin \frac{1}{h}$$

(連続だが、右微分可能ではない、左微分可能ではない)

$f(x)$ は、$x = 0$ で微分可能ではない

定理 2.1

定理 ($f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるための必要十分条件)

$f(x)$ が $x = a$ の近傍で以下のようにかける

$$f(x) = f(a) + (x - a)A + (x - a)B(x)$$

A: 定数
$B(x)$: a の近傍で定義、$x = a$ で連続、$B(a) = 0$
($A = f'(a)$ が成立する)

定理 2.1(続)

証明: $f(x)$ が微分可能であれば、a の近傍で

$$B(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

とおくと、$x = a$ で連続かつ、a の近傍で

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)B(x)$$

逆に、$f(x)$ が a の近傍で、上式でかけると、$x \neq a$ のとき、

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + B(x)$$

$\displaystyle\lim_{x \to a}(A + B(x)) = A$ より、$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$

定理 2.1 の系

系

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能なら、$x = a$ で連続

証明: 微分可能であれば、以下のようにかけるのであるから、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となる。

$$f(x) = f(a) + (x - a)A + (x - a)B(x)$$

A: 定数
$B(x)$: a の近傍で定義、$x = a$ で連続、$B(a) = 0$

逆は成立しない。　例 2.1, 例 2.2

定理 2.2

定理 (2 関数が微分可能なら、和、差、積、商も微分可能)

$f(x), g(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば、$f(x) \pm g(x)$, $cf(x)$ (c: 定数), $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ ($g(a) \neq 0$) も微分可能で、

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $(f-g)' = f'(a) + g'(a)$
3. $(cf)'(a) = cf'(a)$
4. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
5. $(\dfrac{f}{g})'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

定理 2.2(続)

証明: 定理 2.1 より、$A := f'(a)$, $B := g'(a)$ として、

$$f(x) := f(a) + (x-a)A + (x-a)B(x)$$

$$g(x) := g(a) + (x-a)C + (x-a)D(x)$$

$$f(x) \pm g(x) = f(a) + g(a) + (x-a)(A \pm C) + (x-a)\{B(x) + D(x)\}$$

$$cf(x) = cf(a) + (x-a)cA + (x-a)cB(x)$$

$$f(x)g(x) = f(a)g(a) + (x-a)\{Ag(a) + f(a)C\} + (x-a)E(x)$$

$$\begin{aligned} E(x) &:= B(x)\{g(a) + (x-a)(C + D(x))\} \\ &\quad + D(x)\{f(a) + (x-a)(A + B(x))\} \end{aligned}$$

$E(a) = 0$, $\lim_{x \to a} E(x) = 0$ より、$x = a$ で連続

定理 2.2(続)

証明: $g(x)$ は $x = a$ で連続で、$g(a) \neq 0$

$$
\begin{aligned}
& \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} \\
= \;& \frac{(x-a)(A+B(x))g(a) - f(a)(x-a)(C+D(x))}{\{g(a)+(x-a)(C+D(x))\}g(a)} \\
& \frac{(x-a)\{Ag(a)-f(a)C\} + (x-a)\{B(x)g(a)-f(a)D(x)\}}{g(a)^2+(x-a)(C+D(x))g(a)} \\
= \;& (x-a)\frac{Ag(a)-f(a)C}{g(a)^2} + (x-a)F(x)
\end{aligned}
$$

$F(x)$ は、$x = a$ の近傍で定義される関数で、
$F(a) = 0$, $\lim_{x \to a} F(x) = 0$ より、$x = a$ で連続

微分可能な関数

定義 (微分可能な関数)

定義域の各点で微分可能な関数

定義 (端点 a, b で微分可能)

a で右微分可能、b で左微分可能

定義 (f の導関数)

f の定義域にその微分係数を対応させる関数 f'

定義 (f を微分する)

f の導関数 f' を求めること

定理 2.1 の系 $\Longrightarrow$ 定理 2.3

定理 2.2 $\Longrightarrow$ 定理 2.4

定理 2.5

定理 (合成関数の微分法)

微分可能な 2 つの関数 $y = f(x), z = g(y)$ の合成関数 $z = (g \circ f)(x) := g(f(x))$ は微分可能で、

$$(g \circ f)'(x) := g'(f(x))f'(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

定理 2.5(続)

証明: 定理 2.1 より、$b = f(a)$, $A := f'(a)$, $C := g'(b)$ として、

$$f(x) := f(a) + (x-a)A + (x-a)B(x)$$

$$g(x) := g(a) + (x-a)C + (x-a)D(x)$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(b) + (x-a)(A + B(x))(C + D(f(x))) \\ &= g(b) + (x-a)CA + (x-a)E(x) \end{aligned}$$

$$E(x) := B(x)C + (A + B(x))D(f(x))$$

は、$x = a$ の近傍で定義された $E(a) = 0$、$\lim_{x \to a} E(x) = 0$ より、a で連続。$(g \circ f)$ は、$x = a$ で微分可能

$$(g \circ f)'(a) = CA = g'(f(a))f'(a)$$

定理 2.6

定理 (逆関数の微分法)

$y=f(x)$ が (閉または開) 区間で単調で微分可能ならば、その逆関数 $x=f^{-1}(y)$ は $f'(x)\neq 0$ となる y で微分可能で、

$$(f^{-1})'=\frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

定理 2.6(続)

証明: 定理 2.1 より、$b = f(a)$ として、

$$f(x) - b = (x-a)f'(a) + (x-a)B(x)$$

$f'(a) \neq 0$ ならば、b の近傍で

$$f^{-1}(y) - a = (y-b)\frac{1}{f'(a)} + (y-b)C(y)$$

$$C(y) := \frac{-B(f^{-1}(y))}{f'(a)^2 + f'(a)B(f^{-1}(y))}$$

$C(b) = 0$、$\lim_{y \to b} C(y) = 0$ より、$y = b$ で連続。ゆえに $x = f^{-1}(y)$ は b で微分可能

$$(f^{-1}(b)) = \frac{1}{f'(a)}$$

諸定義

双曲線サイン、双曲線コサイン、双曲線タンジェント

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

n 回微分可能性、第 n 次導関数

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n}$$