1.3 連続関数

鈴木 譲

2009 年 5 月 13 日 (水)

目次

関数の極限: 復習

定義 ($\lim_{x\to a} f(x) = A$)

任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在

定理 ($\lim_{x\to a} f(x) = A$)

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $x_n \neq a$ なる任意の $\{x_n\}$ について、

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

連続関数

定義 ($y = f(x)$ が $x = a$ で連続)

$x = a$ の近傍で $f(x)$ が定義され、任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在

($x = a$ の近傍で $f(x)$ が定義 $\Longleftrightarrow$
ある $\delta_0 > 0$ が存在し、$|x - a| < \delta_0$ について $f(x)$ が定義)

$x = a$ の近傍で $f(x)$ が定義され、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

定理 ($y = f(x)$ が $x = a$ で連続)

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ なる任意の $\{x_n\}$ について、

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

連続関数 (続)

定義 (関数が $x = a$ で不連続である)

その関数が $x = a$ で連続ではない

定義 (連続関数)

定義域の各点で連続な関数

定理 (連続関数の和、差、積、商)

連続関数の和、差、積、商も連続関数

(商の場合、分母の関数が定義域で 0 にならないことを仮定)

連続関数 (続)

系 (多項式)

多項式は連続関数

証明: $f(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ は、$x = a$ の近傍で定義され、

$$x \to a \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k x^k \to \sum_{k=1}^{n} c_k a^k \Longrightarrow f(x) \to f(a)$$

系 (有理式)

有理式は、分母が 0 で無い範囲で連続関数

証明: $g(x), h(x)$ を多項式、$h(a) \neq 0$ として、$f(x) := g(x)/h(x)$ は、$x = a$ の近傍で定義され、

$$x \to a \Longrightarrow g(x)/h(x) \to g(a)/h(a) \Longrightarrow f(x) \to f(a)$$

例 1.12

$$f(x) := \sin x,\ h := x - a$$

$$|\sin(a+h) - \sin a| = |2\cos\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}| \le 2|\sin\frac{h}{2}| < 2|\frac{h}{2}| = |h|$$

$$|x-a| = |h| < \delta(\epsilon) = \epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < |h| < \epsilon$$

$$|\cos(a+h) - \cos a| = |-2\sin\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}| \le |\sin\frac{h}{2}| < 2|\frac{h}{2}| = |h|$$

$\cos x,\ \sin x$ は任意の $a \in \mathbb{R}$ で連続

例 1.13

$$f(x) = \frac{x^2+x}{|x|} = \begin{cases} x+1, & x>0 \\ -x-1, & x<0 \end{cases}$$

$f(0)$ をどのように定義しても、$f(x)$ は $x=0$ で不連続

例 1.14

$f(x) = x \sin \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$

$$|h \sin \frac{1}{h}| \leq |h|$$

$f(0) = 0$ と定義すれば、$x = 0$ でも連続

右連続、左連続

定義 ($f(x)$ が $x = a$ で右連続)

ある $\delta > 0$ が存在し、$a \le x \le a + \delta$ で関数 $f(x)$ が定義され、

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

定義 ($f(x)$ が $x = a$ で左連続)

ある $\delta > 0$ が存在し、$a - \delta \le x \le a$ で関数 $f(x)$ が定義され、

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$$

$f(0) = 1$ と定義すれば右連続、$f(0) = -1$ と定義すれば左連続

例 1.15

$$f(x) = sin\frac{1}{x} \ (x \neq 0)$$

$f(0)$ をどのように定義しても、
$x = 0$ で右連続でも左連続でもない

例 1.16

$\mathbb{Q}$: 有理数の集合

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$|h| = |x - a| > 0$ をいくら小さくしても、
$|f(a+h) - f(a)| = 1$ とできる。

$f(x)$ は、各 $x = a \in \mathbb{R}$ で不連続

例 1.17

$a > 1$ として、$f(x) = a^x$

$x \notin \mathbb{Q}$ のときも

$$S_x := \{a^t | x > t \in \mathbb{Q}\}$$

の上限として、a^x を定義する。

例 1.17 (続)

$f(x)$ は、単調増加関数

証明: $x \notin \mathbb{Q}$ として、

$$x > t \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a^x \geq a^t$$

ではあるが、$x > s > t$ なる $s \in \mathbb{Q}$ が存在するので、

$$x > t \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a^x > a^t$$

$$x > y \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow a^x \geq a^y$$

ではあるが、$x > t > y$ なる $t \in \mathbb{Q}$ が存在するので、

$$x > y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a^x > a^y$$

例 1.17 (続)

$f(x)$ は、連続関数

証明: $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ (例 1.2) より、
任意の $x \in \mathbb{R}$ と $\epsilon > 0$ について、n を大きくとると、

$$(a^{1/n} - 1) < \epsilon / a^x$$

$u < x < v$, $v - u < 1/n$ なる有理数について、

$$a^v - a^u = a^u(a^{v-u} - 1) < a^x(a^{1/n} - 1) < \epsilon$$

$\delta > 0$ を $u < x - \delta < x < x + \delta < v$ となるように選ぶと、

$$|t - x| < \delta \Longrightarrow |a^t - a^x| < a^v - a^u < \epsilon$$

例 1.17 (続)

a^x は、指数法則を満たす

証明: x, t に収束する有理数の列 $\{x_n\}$, $\{t_n\}$ について、

$$a^{x_n}a^{t_n} = a^{x_n+t_n}$$

a^x は連続関数なので、$n \to \infty$ で、$x_n \to x$, $t_n \to t$, $x_n + t_n \to x + t$ なので、両辺はそれぞれ、$a^x a^t$, a^{x+t} に収束

例 1.17 (続)

$0 < a < 1$ では、同様に単調減少、連続関数

$a = 1$ では、任意の $x \in \mathbb{R}$ について、$1^x = 1$ と定義する。

最大値・最小値の存在

定理 (最大値・最小値の存在)

閉区間上の連続関数は、最大値・最小値をもつ
すなわち、閉区間 $[a, b]$ に $c, d \in \mathbb{R}$ が存在し、
すべての $x \in [a, b]$ に対して、$f(d) \leq f(x) \leq f(c)$

最大値・最小値の存在

証明: $\{f(x)|x \in [a,b]\}$ が上に有界でないと仮定すると、

$$f(t_1) < f(t_2) < \cdots < f(t_n) < \cdots$$

なる数列 $t_1, t_2, \cdots \in [a,b]$ が存在。
$\{t_n\}$ 有界より、$x_n \to c \in [a,b]$ なる部分列 $\{x_n\}$ と $c \in \mathbb{R}$ が存在。
$f(x)$ は連続関数であるので、$f(x_n) \to f(c)$。
$\{f(x_n)\}$ は単調増加で上に有界ではないので、矛盾。
$f(x)$ が上に有界 (M: 上限) より、

1. $x_n \to c \in [a,b]$
2. $\{f(x_n)\}$ は単調増加
3. $f(x_n) \to M$

なる $\{x_n\}$ が存在し、$f(x)$ 連続ゆえ、$f(x_n) \to f(c)$。
$f(c) = M \in \{f(x)|x \in [a,b]\}$ より、M は最大値。

中間値の定理

定理 (中間値の定理)

閉区間上の連続関数 $f(x)$ に対し、$f(a) < f(b)$ とする。
$f(a) < u < f(b)$ なる任意の u に対し、$f(c) = u$ となる $[a, b]$ の点 c が存在

中間値の定理 (続)

証明: $c \in [a,b]$ を

$$S := \{x \in [a,b] | f(t) < u, t \in [a,x]\}$$

の上限をとおくと、$x \in S$ で $f(x) < u$ なので、$f(c) \le u$。
$\epsilon := u - f(c) > 0$ を仮定すると、$f(x)$ の連続性より

$$|x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

なる δ が存在する。

$$c - \delta < x < c + \delta \Longrightarrow f(x) < u$$

$$x < c \Longrightarrow f(x) < u$$

したがって、

$$x < c + \delta \Longrightarrow f(x) < u$$

これは、c が S の上限であることと矛盾。

中間値の定理 (続)

定理

閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ の値域は、閉区間 $[m, M]$ である。ただし、m, M は $f(x)$ の最小値、最大値である。

証明: $m = M$ であれば、$f(x)$ は定数関数。
$m < M$ であれば、最大値最小値の存在性の定理より、
$m = f(c) \leq f(a), f(b) \leq f(d) = M$ となる $c, d \in [a, b]$ が存在。

$a \leq c < d \leq b$ として、中間値の定理より、

$$[m, M] = \{f(x)|x \in [c, d]\} = \{f(x)|x \in [a, b]\}$$

$a \leq d < c \leq b$ としても同様。

連続関数の合成関数

定理

連続関数の合成関数は連続関数である。

証明: $f(x)$ が $x = a$ で連続で、$g(y)$ が $b = f(a)$ で連続のとき、$n \to \infty$ で

$$\begin{aligned} x_n \to a \quad &\Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(a) = b \\ &\Longrightarrow \quad g(f(x_n)) \to g(b) = g(f(a)) \end{aligned}$$

逆関数

$$\begin{aligned} & f(x)\text{: 単調増加連続} \\ \Longrightarrow \quad & m = f(a)\text{: 最小値}, \ M = f(b)\text{: 最大値} \\ \Longrightarrow \quad & \{f(x) | x \in [a, b]\} = [m, M] \end{aligned}$$

$[a, b]$, $[m, M]$ は、1 対 1

y から $x = f^{-1}(y)$ への対応が一意 (**逆関数**)

$f(x)$: 単調減少増加関数でも同様

逆関数 (続)

定理

単調増加連続関数の逆関数は、単調増加連続関数
(単調減少でも同様)

証明: $f(c)=d$
$[c-\epsilon, c+\epsilon]$ が f の定義域に含まれるように $\epsilon>0$ をとると、

$$f(c-\epsilon)<d=f(c)<f(c+\epsilon)$$

$$f(c-\epsilon)<d-\delta(\epsilon)<d<d+\delta(\epsilon)<f(c+\epsilon)$$

なる $\delta=\delta(\epsilon)$ が存在

$$d-\delta(\epsilon)<y<d+\delta(\epsilon) \Longrightarrow c-\epsilon<x<c+\epsilon$$

例 1.18 対数関数

$f(x) = x^a$: 連続関数

$$\begin{array}{lcl} a > 1 & \Longrightarrow & \text{単調増加} \\ 0 < a < 1 & \Longrightarrow & \text{単調減少} \end{array}$$

逆関数 $f^{-1}(y) = \log_a x$: 連続関数

$$\begin{array}{lcl} a > 1 & \Longrightarrow & \text{単調増加} \\ 0 < a < 1 & \Longrightarrow & \text{単調減少} \end{array}$$

指数法則より

$$\log_a(st) = \log_a x + \log_a y$$

$e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2.71\ldots$ を底とする対数 (**自然対数**) を、単に $\log x$ であらわす。

例 1.19 逆三角関数

三角関数	逆三角関数
$\sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$	$\sin^{-1} x : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
$\cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$	$\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$
$\tan x : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty)$	$\tan^{-1} x : [-1, 1] \to (-\pi/2, \pi/2)$

三角関数が連続なので、逆関数である逆三角関数も連続

一様連続性

一般の連続性

$$|x-a|<\delta(\epsilon,a)\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\epsilon$$

一様連続性 ($\delta(\epsilon)$ が $x=a$ に依存しない)

$$|x-a|<\delta(\epsilon)\Longrightarrow|f(x)-f(a)|<\epsilon$$

一様連続 $\Longrightarrow$ 連続
(逆は成立しない)

例: $y=1/x$ であれば、a が 0 に近いと、δ を小さくしないと、

$$|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}|<\epsilon$$

とすることはできない。

一様連続性 (続)

定理

閉区間で連続であれば、その区間で一様連続

証明: $|x_n - t_n| < \dfrac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \epsilon$ なる $\{x_n\}, \{t_n\}$ が存在すると仮定すると、
「有界な無限列は、収束する部分列を含む」より、

1. $x_{n_k} \to c$ となる部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在
   $\{x_{n_k}\}, \{t_{n_k}\}$ の n_k, $k = 1, 2, \cdots$ にかえる
2. $t_{n_k} \to c'$ となる部分列 $\{t_{n_k}\}$ が存在
   $\{t_{n_k}\}, \{t_{n_k}\}$ の n_k, $k = 1, 2, \cdots$ にかえる
3. $c = c'$ でないと仮定と矛盾

f の連続性より、$n \to \infty$ で、$f(x_n) \to f(c), f(t_n) \to f(c)$

$$|f(x_n) - f(t_n)| \leq |f(x_n) - f(c)| + |f(x_n) - f(c)| \to 0$$

一様連続性 (続)

$f(x) = \dfrac{1}{x}(0 < x < 2)$ が一様連続ではない。

証明: $\epsilon = 1, x_n = \dfrac{1}{n}, t_n = \dfrac{1}{n+1}$ とおくと、

$$|x_n - t_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n}$$

$$|f(x_n) - f(t_n)| = (n+1) - n = 1 \geq 1 = \epsilon$$