

1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

2009年5月13日(水)

# 目次

## 1.3 連続関数

鈴木 謙

### 目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

- 1 関数の極限: 復習
- 2 連続関数
- 3 右連続、左連続
- 4 最大値・最小値の存在
- 5 中間値の定理
- 6 連続関数の合成関数
- 7 逆関数
- 8 一様連続性

# 関数の極限: 復習

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

**定義** ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ )

任意の  $\epsilon > 0$  に対して、

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon$$

なる  $\delta = \delta(\epsilon)$  が存在

**定理** ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ )

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  かつ  $x_n \neq a$  なる任意の  $\{x_n\}$  について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

# 連続関数

## 1.3 連続関数

鈴木 謙

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

**定義** ( $y = f(x)$  が  $x = a$  で連続)

$x = a$  の近傍で  $f(x)$  が定義され、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

なる  $\delta = \delta(\epsilon)$  が存在

( $x = a$  の近傍で  $f(x)$  が定義  $\iff$

ある  $\delta_0 > 0$  が存在し、 $|x - a| < \delta_0$  について  $f(x)$  が定義)

$x = a$  の近傍で  $f(x)$  が定義され、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**定理** ( $y = f(x)$  が  $x = a$  で連続)

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  なる任意の  $\{x_n\}$  について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

# 連続関数 (続)

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

**定義 (関数が  $x = a$  で不連続である)**

その関数が  $x = a$  で連続ではない

**定義 (連続関数)**

定義域の各点で連続な関数

**定理 (連続関数の和、差、積、商)**

連続関数の和、差、積、商も連続関数

(商の場合、分母の関数が定義域で  $0$  にならないことを仮定)

# 連続関数 (続)

## 1.3 連続関数

鈴木 謙

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

## 系 (多項式)

多項式は連続関数

証明:  $f(x) := \sum_{k=0}^n c_k x^k$  は、 $x = a$  の近傍で定義され、

$$x \rightarrow a \implies \sum_{k=1}^n c_k x^k \rightarrow \sum_{k=1}^n c_k a^k \implies f(x) \rightarrow f(a)$$

## 系 (有理式)

有理式は、分母が 0 で無い範囲で連続関数

証明:  $g(x), h(x)$  を多項式、 $h(a) \neq 0$  として、 $f(x) := g(x)/h(x)$  は、 $x = a$  の近傍で定義され、

$$x \rightarrow a \implies g(x)/h(x) \rightarrow g(a)/h(a) \implies f(x) \rightarrow f(a)$$

## 例 1.12

### 1.3 連続関数

鈴木 謙

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

$$f(x) := \sin x, \quad h := x - a$$

$$|\sin(a+h) - \sin a| = \left| 2 \cos \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{h}{2} \right| < 2 \left| \frac{h}{2} \right| = |h|$$

$$|x - a| = |h| < \delta(\epsilon) = \epsilon \implies |f(x) - f(a)| < |h| < \epsilon$$

$$|\cos(a+h) - \cos a| = \left| -2 \sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \right| \leq \left| \sin \frac{h}{2} \right| < 2 \left| \frac{h}{2} \right| = |h|$$

$\cos x, \sin x$  は任意の  $a \in \mathbb{R}$  で連続

# 例 1.13

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{|x|} = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ -x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

$f(0)$  をどのように定義しても、 $f(x)$  は  $x = 0$  で不連続



# 例 1.14

1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\left| h \sin \frac{1}{h} \right| \leq |h|$$

$f(0) = 0$  と定義すれば、 $x = 0$  でも連続

# 右連続、左連続

## 1.3 連続 関数

鈴木 譲

目次

関数の極  
限: 復習

連続関数

右連続、左  
連続

最大値・最  
小値の存在

中間値の  
定理

連続関数の  
合成関数

逆関数

一様連続性

**定義**  $f(x)$  が  $x = a$  で右連続)

ある  $\delta > 0$  が存在し、 $a \leq x \leq a + \delta$  で関数  $f(x)$  が定義され、

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$$

**定義**  $f(x)$  が  $x = a$  で左連続)

ある  $\delta > 0$  が存在し、 $a - \delta \leq x \leq a$  で関数  $f(x)$  が定義され、

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$$

$f(0) = 1$  と定義すれば右連続、 $f(0) = -1$  と定義すれば左連続

## 例 1.15

1.3 連続  
関数

鈴木 譲

目次

関数の極  
限: 復習

連続関数

右連続、左  
連続

最大値・最  
小値の存在

中間値の  
定理

連続関数の  
合成関数

逆関数

一様連続性

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$f(0)$  をどのように定義しても、  
 $x = 0$  で右連続でも左連続でもない

# 例 1.16

1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

$\mathbb{Q}$ : 有理数の集合

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$|h| = |x - a| > 0$  をいくら小さくしても、  
 $|f(a + h) - f(a)| = 1$  とできる。

$f(x)$  は、各  $x = a \in \mathbb{R}$  で不連続

# 例 1.17

1.3 連続  
関数

鈴木 譲

目次

関数の極  
限: 復習

連続関数

右連続、左  
連続

最大値・最  
小値の存在

中間値の  
定理

連続関数の  
合成関数

逆関数

一様連続性

$a > 1$  として、 $f(x) = a^x$

$x \notin \mathbb{Q}$  のときも

$$S_x := \{a^t \mid x > t \in \mathbb{Q}\}$$

の上限として、 $a^x$  を定義する。

## 例 1.17 (続)

### 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

$f(x)$  は、単調増加関数

証明:  $x \notin \mathbb{Q}$  として、

$$x > t \in \mathbb{Q} \implies a^x \geq a^t$$

ではあるが、 $x > s > t$  なる  $s \in \mathbb{Q}$  が存在するので、

$$x > t \in \mathbb{Q} \implies a^x > a^t$$

$$x > y \notin \mathbb{Q} \implies a^x \geq a^y$$

ではあるが、 $x > t > y$  なる  $t \in \mathbb{Q}$  が存在するので、

$$x > y \in \mathbb{Q} \implies a^x > a^y$$

## 例 1.17 (続)

1.3 連続

関数

鈴木 謙

目次

関数の極

限: 復習

連続関数

右連続、左

連続

最大値・最

小値の存在

中間値の

定理

連続関数の

合成関数

逆関数

一様連続性

$f(x)$  は、連続関数

証明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$  (例 1.2) より、

任意の  $x \in \mathbb{R}$  と  $\epsilon > 0$  について、 $n$  を大きくとると、

$$(a^{1/n} - 1) < \epsilon/a^x$$

$u < x < v$ ,  $v - u < 1/n$  なる有理数について、

$$a^v - a^u = a^u(a^{v-u} - 1) < a^x(a^{1/n} - 1) < \epsilon$$

$\delta > 0$  を  $u < x - \delta < x < x + \delta < v$  となるように選ぶと、

$$|t - x| < \delta \implies |a^t - a^x| < a^v - a^u < \epsilon$$

## 例 1.17 (続)

1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

$a^x$  は、指数法則を満たす

証明:  $x, t$  に収束する有理数の列  $\{x_n\}, \{t_n\}$  について、

$$a^{x_n} a^{t_n} = a^{x_n + t_n}$$

$a^x$  は連続関数なので、 $n \rightarrow \infty$  で、 $x_n \rightarrow x, t_n \rightarrow t, x_n + t_n \rightarrow x + t$  なので、両辺はそれぞれ、 $a^x a^t, a^{x+t}$  に収束



## 例 1.17 (続)

1.3 連続  
関数

鈴木 譲

目次

関数の極  
限: 復習

連続関数

右連続、左  
連続

最大値・最  
小値の存在

中間値の  
定理

連続関数の  
合成関数

逆関数

一様連続性

$0 < a < 1$  では、同様に単調減少、連続関数

$a = 1$  では、任意の  $x \in \mathbb{R}$  について、 $1^x = 1$  と定義する。

# 最大値・最小値の存在

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

### 定理 (最大値・最小値の存在)

閉区間上の連続関数は、最大値・最小値をもつ  
すなわち、閉区間  $[a, b]$  に  $c, d \in \mathbb{R}$  が存在し、  
すべての  $x \in [a, b]$  に対して、 $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$

# 最大値・最小値の存在

## 1.3 連続

### 関数

鈴木 譲

目次

関数の極  
限: 復習

連続関数

右連続、左  
連続

最大値・最  
小値の存在

中間値の  
定理

連続関数の  
合成関数

逆関数

一様連続性

証明:  $\{f(x)|x \in [a, b]\}$  が上に有界でないと仮定すると、

$$f(t_1) < f(t_2) < \dots < f(t_n) < \dots$$

なる数列  $t_1, t_2, \dots \in [a, b]$  が存在。

$\{t_n\}$  有界より、 $x_n \rightarrow c \in [a, b]$  なる部分列  $\{x_n\}$  と  $c \in \mathbb{R}$  が存在。

$f(x)$  は連続関数であるので、 $f(x_n) \rightarrow f(c)$ 。

$\{f(x_n)\}$  は単調増加で上に有界ではないので、矛盾。

$f(x)$  が上に有界 ( $M$ : 上限) より、

- ①  $x_n \rightarrow c \in [a, b]$
- ②  $\{f(x_n)\}$  は単調増加
- ③  $f(x_n) \rightarrow M$

なる  $\{x_n\}$  が存在し、 $f(x)$  連続ゆえ、 $f(x_n) \rightarrow f(c)$ 。

$f(c) = M \in \{f(x)|x \in [a, b]\}$  より、 $M$  は最大値。

# 中間値の定理

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

### 定理 (中間値の定理)

閉区間上の連続関数  $f(x)$  に対し、 $f(a) < f(b)$  とする。  
 $f(a) < u < f(b)$  なる任意の  $u$  に対し、 $f(c) = u$  となる  $[a, b]$  の点  $c$  が存在

## 中間値の定理 (続)

1.3 連続関数

鈴木 謙

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

証明:  $c \in [a, b]$  を

$$S := \{x \in [a, b] \mid f(t) < u, t \in [a, x]\}$$

の上限をとおくと、 $x \in S$  で  $f(x) < u$  なので、 $f(c) \leq u$ 。  
 $\epsilon := u - f(c) > 0$  を仮定すると、 $f(x)$  の連続性より

$$|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

なる  $\delta$  が存在する。

$$c - \delta < x < c + \delta \implies f(x) < u$$

$$x < c \implies f(x) < u$$

したがって、

$$x < c + \delta \implies f(x) < u$$

これは、 $c$  が  $S$  の上限であることと矛盾。

# 中間値の定理 (続)

1.3 連続

関数

鈴木 譲

目次

関数の極  
限: 復習

連続関数

右連続、左  
連続

最大値・最  
小値の存在

中間値の  
定理

連続関数の  
合成関数

逆関数

一様連続性

## 定理

閉区間  $[a, b]$  上の連続関数  $f(x)$  の値域は、閉区間  $[m, M]$  である。ただし、 $m, M$  は  $f(x)$  の最小値、最大値である。

証明:  $m = M$  であれば、 $f(x)$  は定数関数。

$m < M$  であれば、最大値最小値の存在性の定理より、  
 $m = f(c) \leq f(a), f(b) \leq f(d) = M$  となる  $c, d \in [a, b]$  が存在。

$a \leq c < d \leq b$  として、中間値の定理より、

$$[m, M] = \{f(x) | x \in [c, d]\} = \{f(x) | x \in [a, b]\}$$

$a \leq d < c \leq b$  としても同様。

# 連続関数の合成関数

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

### 定理

連続関数の合成関数は連続関数である。

証明:  $f(x)$  が  $x = a$  で連続で、 $g(y)$  が  $b = f(a)$  で連続のとき、 $n \rightarrow \infty$  で

$$\begin{aligned}x_n \rightarrow a &\implies f(x_n) \rightarrow f(a) = b \\ &\implies g(f(x_n)) \rightarrow g(b) = g(f(a))\end{aligned}$$

# 逆関数

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

$f(x)$ : 単調増加連続

$\implies m = f(a)$ : 最小値,  $M = f(b)$ : 最大値

$\implies \{f(x) | x \in [a, b]\} = [m, M]$

$[a, b], [m, M]$  は、1対1

$y$  から  $x = f^{-1}(y)$  への対応が一意 (逆関数)

$f(x)$ : 単調減少増加関数でも同様



# 逆関数 (続)

1.3 連続  
関数

鈴木 謙

目次

関数の極  
限: 復習

連続関数

右連続、左  
連続

最大値・最  
小値の存在

中間値の  
定理

連続関数の  
合成関数

逆関数

一様連続性

## 定理

単調増加連続関数の逆関数は、単調増加連続関数  
(単調減少でも同様)

証明:  $f(c) = d$

$[c - \epsilon, c + \epsilon]$  が  $f$  の定義域に含まれるように  $\epsilon > 0$  をとると、

$$f(c - \epsilon) < d = f(c) < f(c + \epsilon)$$

$$f(c - \epsilon) < d - \delta(\epsilon) < d < d + \delta(\epsilon) < f(c + \epsilon)$$

なる  $\delta = \delta(\epsilon)$  が存在

$$d - \delta(\epsilon) < y < d + \delta(\epsilon) \implies c - \epsilon < x < c + \epsilon$$

## 例 1.18 対数関数

### 1.3 連続関数

鈴木 謙

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

$f(x) = x^a$ : 連続関数

$a > 1 \implies$  単調増加

$0 < a < 1 \implies$  単調減少

逆関数  $f^{-1}(y) = \log_a x$ : 連続関数

$a > 1 \implies$  単調増加

$0 < a < 1 \implies$  単調減少

指数法則より

$$\log_a(st) = \log_a x + \log_a y$$

$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2.71\dots$  を底とする対数 (自然対数) を、単に  $\log x$  であらわす。

# 例 1.19 逆三角関数

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

三角関数	逆三角関数
$\sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$	$\sin^{-1} x : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$
$\cos x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$	$\cos^{-1} x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
$\tan x : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty)$	$\tan^{-1} x : [-1, 1] \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

三角関数が連続なので、逆関数である逆三角関数も連続

# 一様連続性

## 一般の連続性

$$|x - a| < \delta(\epsilon, a) \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

## 一様連続性 ( $\delta(\epsilon)$ が $x = a$ に依存しない)

$$|x - a| < \delta(\epsilon) \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

一様連続  $\implies$  連続  
(逆は成立しない)

例:  $y = 1/x$  であれば、 $a$  が 0 に近いと、 $\delta$  を小さくしないと、

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \epsilon$$

とすることはできない。

1.3 連続関数

鈴木 謙

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

# 一様連続性 (続)

## 1.3 連続関数

鈴木 謙

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

### 定理

閉区間で連続であれば、その区間で一様連続

証明:  $|x_n - t_n| < \frac{1}{n}$ ,  $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \epsilon$  なる  $\{x_n\}, \{t_n\}$  が存在すると仮定すると、

「有界な無限列は、収束する部分列を含む」より、

- ①  $x_{n_k} \rightarrow c$  となる部分列  $\{x_{n_k}\}$  が存在  
 $\{x_{n_k}\}, \{t_{n_k}\}$  の  $n_k, k = 1, 2, \dots$  にかえる
- ②  $t_{n_k} \rightarrow c'$  となる部分列  $\{t_{n_k}\}$  が存在  
 $\{x_{n_k}\}, \{t_{n_k}\}$  の  $n_k, k = 1, 2, \dots$  にかえる
- ③  $c = c'$  でないと仮定と矛盾

$f$  の連続性より、 $n \rightarrow \infty$  で、 $f(x_n) \rightarrow f(c), f(t_n) \rightarrow f(c)$

$$|f(x_n) - f(t_n)| \leq |f(x_n) - f(c)| + |f(t_n) - f(c)| \rightarrow 0$$

# 一様連続性 (続)

## 1.3 連続関数

鈴木 譲

目次

関数の極限: 復習

連続関数

右連続、左連続

最大値・最小値の存在

中間値の定理

連続関数の合成関数

逆関数

一様連続性

$f(x) = \frac{1}{x} (0 < x < 2)$  が一様連続ではない。

証明:  $\epsilon = 1, x_n = \frac{1}{n}, t_n = \frac{1}{n+1}$  とおくと、

$$|x_n - t_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n}$$

$$|f(x_n) - f(t_n)| = (n+1) - n = 1 \geq 1 = \epsilon$$