1.2 関数の極限

鈴木 讓

2009 年 4 月 22 日 (水)

目次

関数の極限: 定義

定義 ($x \to a$ での $f(x)$ の極限値, $\lim_{x \to a} f(x) = A$)

任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在する

例: $f(x) = x \to 0$ $(x \to 0)$:
$|x - 0| < \delta(\epsilon) := \epsilon$ で、$|f(x) - 0| = |x| < \epsilon$

関数の極限: 加減乗除

定理

$f(x) \to A, g(x) \to B$ のとき、$c \in \mathbb{R}$ として、
$f(x) \pm g(x)$, $c \cdot f(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ が収束し、

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
2. $\lim(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim f(x)$
3. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$g(x) \neq 0$, $\lim g(x) \neq 0$ のとき、$f(x)/g(x)$ が収束し、

4. $\lim(f(x)/g(x)) = \lim f(x)/\lim g(x)$

関数の極限: 加減乗除 (続)

証明:

1. 任意の $\epsilon > 0$ について、$0 < |x - a| < \delta$ で

$$|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}\ ,\ |g(x) - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在する。
したがって、任意の $\epsilon > 0$ について、$0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$ で

$$\begin{aligned} |(f(x) \pm g(x)) - (A \pm B)| &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

関数の極限: 加減乗除 (続)

2. $c=0$ であれば自明。$c \neq 0$ を仮定すると、
任意の $\epsilon > 0$ について、$0 < |x-a| < \delta$ で

$$|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{|c|}$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在する。
任意の $\epsilon > 0$ について、$0 < |x-a| < \delta(\epsilon)$ で

$$|cf(x) - cA| = |c||f(x) - A| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$$

関数の極限: 加減乗除 (続)

3. 任意の $\epsilon > 0$ について、$0 < |x-a| < \delta$ で

$$|f(x)-A| < \frac{\epsilon}{\epsilon+|A|+|B|}\ ,\ |g(x)-B| < \frac{\epsilon}{\epsilon+|A|+|B|}$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在する。
任意の $\epsilon > 0$ について、$0 < |x-a| < \delta(\epsilon)$ で

$$\begin{aligned} & |f(x)g(x)-AB| \\ < \ & |(A+\frac{\epsilon}{\epsilon+|A|+|B|})(B+\frac{\epsilon}{\epsilon+|A|+|B|})-AB| \\ = \ & |\frac{\epsilon(\epsilon+A+B)}{\epsilon+|A|+|B|}| \le \epsilon \end{aligned}$$

関数の極限: 加減乗除 (続)

4. $\lim f(x)g(x) = AB$ より、$\lim \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$ を示せば十分。

$$0 < |x-a| < \delta_0 \Longrightarrow |g(x)| > |B|/2$$

となる δ_0 が存在する。実際、任意の $\epsilon > 0$ で
$|x-a| < \delta_0(\epsilon) \Longrightarrow |g(x) - B| < \epsilon$ より、

$$||g(x)| - |B|| < |g(x) - B| < |B|/2$$

となる δ_0 が存在する。
他方、任意の $\epsilon > 0$ について、$0 < |x-a| < \delta_1$ で

$$|g(x) - B| < \frac{|B|^2}{2}\epsilon$$

なる $\delta_1 = \delta_1(\epsilon)$ が存在する。
任意の $\epsilon > 0$ について、$0 < |x-a| < \delta(\epsilon) := \min\{\delta_0, \delta_1(\epsilon)\}$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{|g(x) - B|}{|g(x)||B|} < \frac{\epsilon|B|^2/2}{|B||B|/2} = \epsilon$$

関数の極限: はさみうち

定理

$\lim_{x\to a} f(x) = A,\ \lim_{x\to a} g(x) = B,$
$0 < |x-a| < \delta$ で $f(x) \le h(x) \le g(x)$ なる $\delta > 0$ が存在
$\Longrightarrow \lim_{x\to a} h(x) = A$

証明: 任意の $\epsilon > 0$ について、

$$0 < |x-a| < \delta_0 \Longrightarrow |f(x)-A| < \epsilon, |g(x)-A| < \epsilon$$

なる $\delta_0 = \delta_0(\epsilon)$ が存在する。

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) \le h(x) \le g(x)$$

より、$|x-a| < \min\{\delta_0(\epsilon), \delta\}$ で

$$A - \epsilon \le f(x) \le h(x) \le g(x) < A + \epsilon$$

例 1.4

$x \to 0$ で、

$$x \to 0\ ,\ x^2 = x \cdot x \to 0$$

$$3 + 2x \to 3\ ,\ 5 - 4x^2 \to 5$$

$$\frac{3x^2 + 2x^2}{5x^2 - 4x^4} = \frac{3 + 2x}{5 - 4x^2} \to \frac{3}{5}$$

例 1.5

$a > 0$
任意の $\epsilon > 0$ に対して、$0 < |x - a| < \delta(\epsilon) := \sqrt{a}\epsilon$ で、

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

したがって、$\sqrt{x} \to \sqrt{a}\ (x \to a)$

$x \to 0$ で、

$$1 + x \to 1\ ,\ 1 - x \to 1$$

$$\sqrt{1+x} \to 1\ ,\ \sqrt{1-x} \to 1$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2} \to 1$$

例 1.6

$$0 \le |x \sin \frac{1}{x}| \le |x| \to 0$$

$x \to 0$ で、

$$x \sin \frac{1}{x} \to 0$$

例 1.7

$x \to 0$ で、

$$\frac{\sin x}{x} \to 1$$

証明: 各自テキストを読む

関数が収束すれば、その周りで有界

定理

$f(x)$ が $x \to a$ で収束
$\Longrightarrow$ 「$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < M$
となる $M > 0$ と $\delta > 0$ が存在」

証明: $f(x) \to A$ であれば、任意の $\epsilon > 0$ について、
$0 < |x-a| < \delta(\epsilon)$ で $|f(x) - A| < \epsilon$

$$|f(x)| - |A| \le |f(x) - A| < \epsilon$$

となる。$M := |A| + \epsilon$, $\delta := \delta(\epsilon)$ とおく。

数列の極限との関係

定理

$f(x) \to A \ (x \to a)$
$\iff$ 「$x_n \to a \ (n \to \infty)$, $x_n \neq a$ を満足する任意の数列 $\{x_n\}$ で $f(x_n) \to A \ (n \to \infty)$」

証明: 演習問題で各自

関数についてのコーシーの収束条件

定理

「$f(x)$ が $x \to a$ で収束」

$\Longleftrightarrow$

「任意の $\epsilon > 0$ について、

$$0 < |x-a| < \delta, 0 < |t-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(t)| < \epsilon$$

なる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在」

証明: 演習問題で各自

関数の極限: 定義 (続)

定義 ($f(x)$ が $+\infty$ に発散, $f(x) \to +\infty$)

任意の $M > 0$ について

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

なる $\delta = \delta(M)$ が存在する

定義 ($f(x)$ が $-\infty$ に発散, $f(x) \to -\infty$)

任意の $M < 0$ について

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) < M$$

なる $\delta = \delta(M)$ が存在する

関数の極限: 右極限と左極限

定義 ($x \to a$ での $f(x)$ の右からの極限値, $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$)

任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

となる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在する

定義 ($x \to a$ での $f(x)$ の左からの極限値, $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$)

任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$0 < a - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

となる $\delta = \delta(\epsilon)$ が存在する

関数の極限: 右極限と左極限 (続)

右からの極限と左からの極限は、一般には一致しない。

例:

$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0+0} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0-0}$$

極限が存在

右からの極限と左からの極限が存在して等しい

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < x-a < \delta_1(\epsilon) \Longrightarrow |f(x)-A| < \epsilon \\ 0 < a-x < \delta_2(\epsilon) \Longrightarrow |f(x)-A| < \epsilon \end{array}\right.$$

が成立すれば、$\delta(\epsilon) := \min\{\delta_1(\epsilon), \delta_1(\epsilon)\}$ で、

$$0 < |x-a| < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |f(x)-A| < \epsilon$$

逆にこれが成立すれば、

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < x-a < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |f(x)-A| < \epsilon \\ 0 < a-x < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |f(x)-A| < \epsilon \end{array}\right.$$

関数の極限: 定義 (続)

定義 ($f(x) \to A$ $(x \to +\infty)$, $f(x) \to +\infty$)

任意の $\epsilon > 0$ について

$$M < x \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

なる $M = M(\epsilon) > 0$ が存在する

定義 ($f(x) \to A$ $(x \to -\infty)$, $f(x) \to +\infty$)

任意の $\epsilon > 0$ について

$$x < M \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

なる $M = M(\epsilon) < 0$ が存在する