

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

2009年4月8日(水)

2009年4月15日(水)

目次

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 謙

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラースの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

- 1 実数の公理
- 2 数列の極限: 定義
- 3 絶対値を含む不等式
- 4 数列の極限: 諸性質
- 5 上界、下界
- 6 上限・下限
- 7 ワイヤシュトラースの定理の証明
- 8 収束する数列は有界である
- 9 単調な数列
- 10 例 1.1: r^n ($r > 0$)
- 11 例 1.2: $a^{1/n}$ ($a > 0$)
- 12 例 1.3: $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$
- 13 ボルツァノ-ワイヤスシュトラースの定理
- 14 有界な数列は収束する部分列を含む
- 15 コーシーの収束条件

実数の公理

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 謙

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

公理: 証明をしないで認める命題
(それ以外は認めない)

\mathbb{R} : 実数全体

$a, b \in \mathbb{R}$

公理 (加減乗除)

- $a + b, ab \in \mathbb{R}$
- $a + x = b$ となる $x \in \mathbb{R}$ が唯一存在
- $a \neq 0$ のとき $ay = b$ なる $y \in \mathbb{R}$ が唯一存在
- 加法乗法に関する結合法則、交換法則、分配法則

公理 (大小関係)

$a > b, a = b, a < b$ のいずれかが成立

実数の公理 (続)

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラースの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

公理 (アルキメデス)

任意の $a, b > 0$ について、 $b < Na$ なる自然数 N が存在

公理 (カントール)

- $a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_1$
- $b_n - a_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$

なる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して

$$a_n \leq c \leq b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

を満足する $c \in \mathbb{R}$ が唯一存在

数列の極限: 定義

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 謙

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定義 (数列 $\{a_n\}$ が極限值 a に収束, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$)

任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $n \geq N$ で

$$|a_n - a| < \epsilon$$

となる $N = N(\epsilon)$ が存在

例: $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$):

$$n \geq N(\epsilon) := \frac{2}{\epsilon} \text{ で、 } |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

数列の極限: 定義 (続)

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定義 (数列 $\{a_n\}$ が発散)

$\{a_n\}$ が収束しない

定義 (数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ ($-\infty$) に発散, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$))

任意の $M \in \mathbb{R}$ に対して、 $n \geq N$ で $a_n > M$ ($a_n < M$) となる $N = N(M)$ が存在

例: $a_n = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$):
 $n \geq N(M) := M^3$ で、 $a_n \geq \sqrt{M^3} > M$

絶対値を含む不等式

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

補題

$a, b \in \mathbb{R}$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

証明:

$$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2 = a^2 + b^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 = 2(|ab| - ab) \geq 0$$

$$|a - b|^2 - (|a| - |b|)^2 = 2(|ab| - ab) \geq 0$$

数列の極限: 諸性質

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラースの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定理

数列が収束 \implies その極限は唯一

証明: $a_n \rightarrow a, a_n \rightarrow b$ のもとで、
 $a \neq b$

$\implies \epsilon := |a - b|/2 > 0$ と $n \geq N(\epsilon)$ について

$$|a_n - a| < \epsilon, |b_n - b| < \epsilon$$

$\implies |a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\epsilon = |a - b|$ (矛盾)

数列の極限: 諸性質 (続)

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, |b_n - a| \leq |a_n - a|, n = 1, 2, \dots \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$

証明: 任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $n \geq N$ で

$$|b_n - a| \leq |a_n - a| < \epsilon$$

となる $N = N(\epsilon)$ が存在

数列の極限: 諸性質 (続)

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a_n \leq b_n, n = 1, 2, \dots \implies a \leq b$$

証明: $\epsilon := (a - b)/2 > 0$
 $\implies n \geq N$ で

$$|a_n - a| < \epsilon, |b_n - b| < \epsilon$$

となる $N = N(\epsilon)$ が存在
 $\implies n \geq N$ で

$$b_n < b + \epsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2} = a - \epsilon < a_n$$

(矛盾)

数列の極限: 諸性質 (続)

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定理

$\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束するとき、 $c \in \mathbb{R}$ として、 $\{a_n \pm b_n\}, \{c a_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ が収束し、

① $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

② $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$

③ $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

$b_n \neq 0, \lim b_n \neq 0$ のとき、 $\{a_n/b_n\}$ が収束し、

④ $\lim(a_n/b_n) = \lim a_n / \lim b_n$

定理

$b > 0$ のとき、 $b_n := b/n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

$$S \subseteq \mathbb{R}$$

定義 (S が上 (下) に有界)

任意の $x \in S$ に対して、 $x \leq M$ ($x \geq M$) となるような $M \in \mathbb{R}$ (上 (下) 界) が存在する

定義 (S が有界)

S が上に有界かつ下に有界

例: $a < b$ として、

閉区間 $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

开区間 $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

は有界、

整数全体 $\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

は有界ではない

定理 (ワイヤシュトラースの定理)

S が上 (下) に有界 \implies 上 (下) 界の最小 (大) 値が存在

定義 (上限・下限)

上 (下) 界の最小 (大) 値を上 (下) 限という。

例: $[a, b]$, (a, b) とも上限が b , 下限が a

ワイヤシュトラースの定理の証明

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラースの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

a_1 : S の上界ではない

b_1 : S の上界

$n = 1, 2, \dots$ に対して、 $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$ が

S の上界 $\implies a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := c_n$

S の上界ではない $\implies a_{n+1} := c_n, b_{n+1} := b_n$

を繰り返すと、 $\{a_n\}$ が上界でなく、 $\{b_n\}$ が上界であり、

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

であるから、カントールの公理を満足する列

$$a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_1$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \leq \frac{b_1 - a_1}{n} \rightarrow 0$$

が得られ、 $a_n \leq c \leq b_n, n = 1, 2, \dots$ なる唯一の c が得られる。

ワイヤシュトラースの定理の証明 (続)

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 謙

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラースの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

任意の $c' < c < c''$ と十分大きな n に対して、
 $c' < a_n < c < b_n < c''$ とできる

c が S の上界でない

$\implies c < x$ となる $x \in S$ が存在

$\implies c < b_n < x, n \geq N$ となる N が存在

$\implies b_n, n \geq N$ が上界ではない (矛盾)

c が S の上界であるが、最小でない

$\implies d < c$ となる上界 d が存在

$\implies d < a_n < c, n \geq N$ となる N が存在

$\implies a_n, n \geq N$ が上界である (矛盾)

収束する数列は有界である

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 謙

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定理

数列が収束 \implies それらの値のなす集合は有界

証明:

$\lim a_n = a$ であれば、任意の $\epsilon > 0$ について、 $n \geq N$ で

$$|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < \epsilon$$

となる $N = N(\epsilon)$ が存在し、

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |a| + \epsilon\}$$

注意

逆は成立しない

例: $a_n = (-1)^n$

単調かつ有界な数列は収束する

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 謙

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラースの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定義 (数列 $\{a_n\}$ が単調増加 (減少))

$$a_1 < a_2 < \cdots \quad (a_1 > a_2 > \cdots)$$

= を許すと広義単調増加 (減少) であるという

定理

広義単調増加 (減少) な数列に対して、

上 (下) に有界 \implies 収束

上 (下) に有界でない \implies 発散

証明: $\{a_n\}$ が上に有界のとき、その上限を $a (\geq a_n)$ とおく。

$$a_n \not\rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

\implies ある $\epsilon > 0$ について、 $a - a_n \geq \epsilon$ なる十分大きな n が存在

$\implies a - \epsilon \geq a_n, n = 1, 2, \dots$ となる $\epsilon > 0$ が存在

$\implies a - \epsilon$ が $\{a_n\}$ の上界

$\implies a$ が $\{a_n\}$ の上限ではない (矛盾)

単調な数列 (続)

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

$\{a_n\}$ が上に有界ではない

\implies 任意の M について、 $a_n > M$ となる n が存在

\implies 任意の M について、 $n \geq N$ で $a_n > M$ となる N が存在

$\implies \lim a_n = +\infty$

下に有界、下に有界で無い場合も同様

例 1

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

$r > 0$ のとき、 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ は

① $0 < r < 1 \implies r^n \rightarrow 0$

② $r = 1 \implies r^n \rightarrow 1$

③ $r > 1 \implies r^n \rightarrow +\infty$

証明: $a := r - 1 > 0$ であれば、アルキメデスの公理より、任意の $M > 0$ について、 $Na > M$ なる自然数 N が存在し、 $n \geq N$ で

$$r^n = (1 + a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + a^n > na \geq Na > M$$

$0 < r < 1$ であれば、 $r > r^2 > \cdots > r^n > \cdots$ は単調減少で下に有界であるので、収束する。 $a := r^{-1} - 1$ とおくと、任意の $\epsilon > 0$ に対して、アルキメデスの公理より、 $Na\epsilon > 1$ となる自然数 N が存在し、 $n \geq N$ で

$$r^n = \frac{1}{(1+a)^n} = \frac{1}{1+na+\cdots+a^n} < \frac{1}{na} \leq \frac{1}{Na} < \epsilon$$

例 2: $a^{1/n}$ ($a > 0$)

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

証明: $a > 0$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$$

$a > 1$ のとき、 $a > a^{1/2} > a^{1/3} > \dots$ を満たし単調減少で、1 は下界になる (収束する)。その極限 $b (\geq 1)$ が、 $b > 1$ であれば、 $h := b - 1 > 0$ について、二項定理より、

$$a > b^n = (1 + h)^n > nh$$

これが任意の n について成立し、アルキメデスの公理に反する。
 $0 < a < 1$ のとき、 $c := 1/a > 0$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} c^{1/n}} = 1$

例 3: $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 謙

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

$$\begin{aligned} a_n &:= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > a_n \end{aligned}$$

$n > p$ (固定) で

$$\begin{aligned} &1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \\ &< a_n < b_n := 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3 \end{aligned}$$

例 3: $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$ (続)

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラースの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

$\{a_n\}$: 単調増加で上に有界 (極限を e とする)

$$\begin{aligned} a_p &\leq b_p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \right\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \end{aligned}$$

$$e = \lim_{p \rightarrow \infty} a_p \leq \lim_{p \rightarrow \infty} b_p \leq e$$

十分大きな n について b_n を計算すると、 $e = 2.718281828459\dots$

ボルツァノ-ワイヤスシュトラースの定理

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 謙

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤスシュトラースの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定理 (ボルツァノ-ワイヤスシュトラースの定理)

有界な無限集合 $S(\mathbb{R})$ は、異なる点からなる収束する数列を含む

証明: 収束する数列 $\{x_n\}$ を構成する

a_1 : S の下界

b_1 : S の上界

$n = 1, 2, \dots$ に対して、 $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$

$x_n \in S_{n-1} := [S - \{x_1, \dots, x_{n-1}\}] \cap [a_n, b_n]$ を任意に選び、
 $[a_n, c_n]$ が S_n の点を無限個含む $\implies a_{n+1} := a_n, b_{n+1} := c_n$

$[c_n, b_n]$ が S_n の点を無限個含む $\implies a_{n+1} := c_n, b_{n+1} := b_n$

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \quad b_n - a_n \rightarrow 0$$

カントールの公理より、 $a_n \leq c \leq b_n, n = 1, 2, \dots$ なる c が存在

$$|x_n - c| \leq |a_n - b_n| \rightarrow 0$$

有界な数列は収束する部分列を含む

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 譲

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラースの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

系 (ボルツァーノ-ワイヤスシュトラースの定理の系)

有界な数列は収束する部分列を含む

証明: 有界な数列 $\{t_n\}$ から、収束する部分列 $\{t_{n_k}\}$ を構成する

- ① $t_{n_1} = t_{n_2} = \dots$ となるような $n_1 < n_2 < \dots$ が存在しなければ、数列 $\{t_n\}$ の値からなる S は無限集合
- ② 有界な無限集合であれば、 S_{k-1} から $n_k > n_{k-1}$ なる t_{n_k} を $\{x_k\}$ とおく。
(ボルツァーノ-ワイヤスシュトラースの定理の証明)

コーシーの収束条件

1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 謙

目次

実数の公理

数列の極限: 定義

絶対値を含む不等式

数列の極限: 諸性質

上界、下界

上限・下限

ワイヤシュトラスの定理の証明

収束する数列は有界である

単調な数列

例 1.1: r^n

定理

「数列 $\{a_n\}$ が収束」

\iff 「任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $m, n \geq N$ で

$$|a_m - a_n| < \epsilon$$

となるような $N = N(\epsilon)$ が存在」

例: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ は $+\infty$ に発散:

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_n = \frac{1}{2}$$

証明: 演習問題で各自