1.1 数の基本性質と数列の極限

鈴木 讓

2009 年 4 月 8 日 (水)
2009 年 4 月 15 日 (水)

目次

実数の公理

公理: 証明をしないで認める命題
(それ以外は認めない)

$\mathbb{R}$: 実数全体
$a, b \in \mathbb{R}$

公理 (加減乗除)

- $a + b, ab \in \mathbb{R}$
- $a + x = b$ となる $x \in \mathbb{R}$ が唯一存在
- $a \neq 0$ のとき $ay = b$ なる $y \in \mathbb{R}$ が唯一存在
- 加法乗法に関する結合法則、交換法則、分配法則

公理 (大小関係)

$a > b, a = b, a < b$ のいずれかが成立

実数の公理 (続)

公理 (アルキメデス)

任意の $a, b > 0$ について、$b < Na$ なる自然数 N が存在

公理 (カントール)

- $a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots b_1$
- $b_n - a_n \to 0\ (n \to \infty)$

なる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して

$$a_n \leq c \leq b_n,\ \ n = 1, 2, \cdots$$

を満足する $c \in \mathbb{R}$ が唯一存在

数列の極限: 定義

定義 (数列 $\{a_n\}$ が極限値 a に収束, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$)

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$n \geq N$ で

$$|a_n - a| < \epsilon$$

となる $N = N(\epsilon)$ が存在

例: $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$:

$n \geq N(\epsilon) := \dfrac{2}{\epsilon}$ で、$|a_n - 0| = \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$

数列の極限：定義 (続)

定義 (数列 $\{a_n\}$ が発散)

$\{a_n\}$ が収束しない

定義 (数列 $\{a_n\}$ が $+\infty$ $(-\infty)$ に発散, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$)

任意の $M \in \mathbb{R}$ に対して、$n \geq N$ で $a_n > M$ $(a_n < M)$ となる $N = N(M)$ が存在

例: $a_n = \sqrt{n} \to +\infty$ $(n \to \infty)$:
$n \geq N(M) := M^3$ で、$a_n \geq \sqrt{M^3} > M$

絶対値を含む不等式

補題

$a, b \in \mathbb{R}$

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \le |a-b|$$

証明:

$$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 = a^2+b^2+2|a||b| - (a+b)^2 = 2(|ab| - ab) \ge 0$$

$$|a-b|^2 - (|a|-|b|)^2 = 2(|ab| - ab) \ge 0$$

数列の極限: 諸性質

定理

数列が収束 $\Longrightarrow$ その極限は唯一

証明: $a_n \to a, a_n \to b$ のもとで、
$a \neq b$
$\Longrightarrow \epsilon := |a-b|/2 > 0$ と $n \geq N(\epsilon)$ について

$$|a_n - a| < \epsilon \ , \ |b_n - b| < \epsilon$$

$$\Longrightarrow |a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < 2\epsilon = |a-b| \ (\text{矛盾})$$

数列の極限: 諸性質 (続)

定理

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ |b_n - a| \le |a_n - a|,\ n = 1, 2, \cdots \implies \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

証明: 任意の $\epsilon > 0$ に対して、$n \ge N$ で

$$|b_n - a| \le |a_n - a| < \epsilon$$

となる $N = N(\epsilon)$ が存在

数列の極限: 諸性質 (続)

定理

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b,\ a_n \le b_n,\ n = 1, 2, \cdots \Longrightarrow a \le b$$

証明: $\epsilon := (a-b)/2 > 0$

$\Longrightarrow n \ge N$ で

$$|a_n - a| < \epsilon\ ,\ |b_n - b| < \epsilon$$

となる $N = N(\epsilon)$ が存在

$\Longrightarrow n \ge N$ で

$$b_n < b + \epsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \epsilon < a_n$$

(矛盾)

数列の極限：諸性質 (続)

定理

$\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束するとき、$c \in \mathbb{R}$ として、$\{a_n \pm b_n\}$, $\{c\dot{a}_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ が収束し、

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$
2. $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$
3. $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

$b_n \neq 0$, $\lim b_n \neq 0$ のとき、$\{a_n/b_n\}$ が収束し、

4. $\lim(a_n/b_n) = \lim a_n / \lim b_n$

定理

$b > 0$ のとき、$b_n := b/n \to 0 \ (n \to \infty)$

$S \subseteq \mathbb{R}$

定義 (S が上 (下) に有界)

任意の $x \in S$ に対して、$x \le M$ ($x \ge M$) となるような $M \in \mathbb{R}$(上 (下) 界) が存在する

定義 (S が有界)

S が上に有界かつ下に有界

例: $a < b$ として、
閉区間 $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$
開区間 $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
は有界、
整数全体 $\mathbb{Z} := \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$
は有界ではない

上限・下限

定理 (ワイヤシュトラースの定理)

S が上 (下) に有界 $\Longrightarrow$ 上 (下) 界の最小 (大) 値が存在

定義 (上限・下限)

上 (下) 界の最小 (大) 値を上 (下) 限という。

例: $[a, b]$, (a, b) とも上限が b, 下限が a

ワイヤシュトラースの定理の証明

a_1: S の上界ではない
b_1: S の上界
$n = 1, 2, \cdots$ に対して、$c_n := \dfrac{a_n + b_n}{2}$ が
S の上界 $\Longrightarrow a_{n+1} := a_n,\ b_{n+1} := c_n$
S の上界ではない $\Longrightarrow a_{n+1} := c_n,\ b_{n+1} := b_n$
を繰り返すと、$\{a_n\}$ が上界でなく、$\{b_n\}$ が上界であり、

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

であるから、カントールの公理を満足する列

$$a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots b_n \leq \cdots \leq b_1$$

$$0 < b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \leq \frac{b_1 - a_1}{n} \to 0$$

が得られ、$a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, \cdots$ なる唯一の c が得られる。

ワイヤシュトラースの定理の証明 (続)

任意の $c' < c < c''$ と十分大きな n に対して、
$c' < a_n < c < b_n < c''$ とできる

c が S の上界でない
$\Longrightarrow$ $c < x$ となる $x \in S$ が存在
$\Longrightarrow$ $c < b_n < x$, $n \geq N$ となる N が存在
$\Longrightarrow$ b_n, $n \geq N$ が上界ではない (矛盾)

c が S の上界であるが、最小でない
$\Longrightarrow$ $d < c$ となる上界 d が存在
$\Longrightarrow$ $d < a_n < c$, $n \geq N$ となる N が存在
$\Longrightarrow$ a_n, $n \geq N$ が上界である (矛盾)

収束する数列は有界である

定理

数列が収束 $\Longrightarrow$ それらの値のなす集合は有界

証明:
$\lim a_n = a$ であれば、任意の $\epsilon > 0$ について、$n \geq N$ で

$$|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < \epsilon$$

となる $N = N(\epsilon)$ が存在し、

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|, |a| + \epsilon\}$$

注意

逆は成立しない

例: $a_n = (-1)^n$

単調かつ有界な数列は収束する

定義 (数列 $\{a_n\}$ が単調増加 (減少))

$a_1 < a_2 < \cdots \;\; (a_1 > a_2 > \cdots)$
$=$ を許すと広義単調増加 (減少) であるという

定理

広義単調増加 (減少) な数列に対して、
上 (下) に有界 $\Longrightarrow$ 収束
上 (下) に有界でない $\Longrightarrow$ 発散

証明: $\{a_n\}$ が上に有界のとき、その上限を $a(\geq a_n)$ とおく。
$a_n \not\to a \; (n \to \infty)$
$\Longrightarrow$ ある $\epsilon > 0$ について、$a - a_n \geq \epsilon$ なる十分大きな n が存在
$\Longrightarrow$ $a - \epsilon \geq a_n$, $n = 1, 2, \cdots$ となる $\epsilon > 0$ が存在
$\Longrightarrow$ $a - \epsilon$ が $\{a_n\}$ の上界
$\Longrightarrow$ a が $\{a_n\}$ の上限ではない (矛盾)

単調な数列 (続)

$\{a_n\}$ が上に有界ではない
$\Longrightarrow$ 任意の M について、$a_n > M$ となる n が存在
$\Longrightarrow$ 任意の M について、$n \geq N$ で $a_n > M$ となる N が存在
$\Longrightarrow \lim a_n = +\infty$

下に有界、下に有界で無い場合も同様

例 1

$r > 0$ のとき、$\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ は

1. $0 < r < 1 \Longrightarrow r^n \to 0$
2. $r = 1 \Longrightarrow r^n \to 1$
3. $r > 1 \Longrightarrow r^n \to +\infty$

証明: $\underline{a := r - 1 > 0}$ であれば、アルキメデスの公理より、任意の $M > 0$ について、$Na > M$ なる自然数 N が存在し、$n \geq N$ で

$$r^n = (1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + a^n > na \geq Na > M$$

$\underline{0 < r < 1 \text{ であれば、}}$ $r > r^2 > \cdots > r^n > \cdots$ は単調減少で下に有界であるので、収束する。$a := r^{-1} - 1$ とおくと、任意の $\epsilon > 0$ に対して、アルキメデスの公理より、$Na\epsilon > 1$ となる自然数 N が存在し、$n \geq N$ で

$$r^n = \frac{1}{(1+a)^n} = \frac{1}{1 + na + \cdots + a^n} < \frac{1}{na} \leq \frac{1}{Na} < \epsilon$$

例 2: $a^{1/n}$ $(a > 0)$

証明: $a > 0$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$$

$a > 1$ のとき、$a > a^{1/2} > a^{1/3} > \cdots$ を満たし単調減少で、1 は下界になる (収束する)。その極限 $b(\geq 1)$ が、$b > 1$ であれば、$h := b - 1 > 0$ について、二項定理より、

$$a > b^n = (1 + h)^n > nh$$

これが任意の n について成立し、アルキメデスの公理に反する。

$0 < a < 1$ のとき、$c := 1/a > 0$ であり、$\lim a^{1/n} = \dfrac{1}{\lim c^{1/n}} = 1$

例 3: $(1+1/n)^n \to e$

$$
\begin{aligned}
a_n &:= (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1}) \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) > a_n
\end{aligned}
$$

$n > p$(固定) で

$$
\begin{aligned}
& 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{p!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{p-1}{n}) \\
< \quad & a_n < b_n := 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3
\end{aligned}
$$

例 3: $(1+1/n)^n \to e$ (続)

$\{a_n\}$: 単調増加で上に有界 (極限を e とする)

$$\begin{aligned} & a_p \le b_p \\ = \quad & \lim_{n\to\infty}\{1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{p!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{p-1}{n})\} \\ \le \quad & \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned}$$

$$e = \lim_{p\to\infty} a_p \le \lim_{p\to\infty} b_p \le e$$

十分大きな n について b_n を計算すると、$e = 2.718281828459\ldots$

ボルツアノ-ワイヤスシュトラースの定理

定理 (ボルツアノ-ワイヤスシュトラースの定理)

有界な無限集合 $S(\mathbb{R})$ は、異なる点からなる収束する数列を含む

証明: 収束する数列 $\{x_n\}$ を構成する

a_1: S の下界

b_1: S の上界

$n = 1, 2, \cdots$ に対して、$c_n := \dfrac{a_n + b_n}{2}$

$x_n \in S_{n-1} := [S - \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}] \cap [a_n, b_n]$ を任意に選び、

$[a_n, c_n]$ が S_n の点を無限個含む $\Longrightarrow a_{n+1} := a_n,\ b_{n+1} := c_n$

$[c_n, b_n]$ が S_n の点を無限個含む $\Longrightarrow a_{n+1} := c_n,\ b_{n+1} := b_n$

$$a_n \le x_n \le b_n\ ,\ \ b_n - a_n \to 0$$

カントールの公理より、$a_n \le c \le b_n$, $n = 1, 2, \cdots$ なる c が存在

$$|x_n - c| \le |a_n - b_n| \to 0$$

有界な数列は収束する部分列を含む

系 (ボルツアノ-ワイヤストラースの定理の系)

有界な数列は収束する部分列を含む

証明: 有界な数列 $\{t_n\}$ から、収束する部分列 $\{t_{n_k}\}$ を構成する

1. $t_{n_1} = t_{n_2} = \cdots$ となるような $n_1 < n_2 < \cdots$ が存在しなければ、数列 $\{t_n\}$ の値からなる S は無限集合
2. 有界な無限集合であれば、S_{k-1} から $n_k > n_{k-1}$ なる t_{n_k} を $\{x_k\}$ とおく。
   (ボルツアノ-ワイヤストラースの定理の証明)

コーシーの収束条件

定理

「数列 $\{a_n\}$ が収束」
$\Longleftrightarrow$ 「任意の $\epsilon > 0$ に対して、$m, n \geq N$ で

$$|a_m - a_n| < \epsilon$$

となるような $N = N(\epsilon)$ が存在」

例: $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ は $+\infty$ に発散:

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2}$$

証明: 演習問題で各自